

TADEUSZ TUMIDAJSKI*

Aktualne tendencje w opisie i modelowaniu matematycznym procesów przeróbki materiałów uziarnionych

Wprowadzenie

We wszystkich naukach technicznych dąży się do sformalizowania opisu występujących w nich procesów – w tym także technologicznych – za pomocą praw nimi rządzących, co prowadzi do tworzenia i wykorzystywania modeli matematycznych. Nie ulega wątpliwości, że metody i techniki ilościowego modelowania są zagadnieniami podstawowymi, pozwalającymi na dokładne rozpoznanie procesów, a także na ich rozwijanie; dotyczy to także inżynierii procesowej i inżynierii mineralnej. Modelowanie w przeróbce surowców mineralnych jest utrudnione ze względu na złożoność operacji jednostkowych, przy czym główną trudnością jest fakt, że przerabiany materiał jest zbiorem różnych ziaren surowca. Wiele konwencjonalnych metod i technik modelowania matematycznego ma ograniczone zastosowania w odniesieniu do układów przeróbki surowców mineralnych, a uzyskiwane modele mają specjalne cechy i ograniczenia. Dąży się jednak do stosowania podstawowych praw nauk ścisłych, czyli prawa zachowania masy i energii, równań termodynamicznych, kinetyki reakcji oraz transportu masy i ciepła. Takie podejście nazywane jest podejściem heurystycznym, a modele – modelami heurystycznymi. Jeżeli uzyskuje się modele na drodze prowadzonych obserwacji wielkości wejściowych i wyjściowych procesu (metoda *black box*) nazywamy je modelami fenomenologicznymi. Bardzo często stosuje się metodę łączenia obu wymienionych sposobów modelowania, czyli metodę *grey box*. Podręcznikowe i najbardziej ogólne podejście do modeli heurystycznych przedstawił King (2001).

* Prof. dr hab., Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Katedra Przeróbki Kopaliny i Ochrony Środowiska, Kraków; e-mail: tadeusz.tumidajski@agh.edu.pl

Masowe zastosowanie komputerów doprowadziło do tego, że klasyczne zadania projektowania i poszukiwanie optymalnych warunków w dowolnej dziedzinie techniki stały się zadaniami z zakresu informatyki i odpowiednich procedur obliczeniowych (algorytmów). W ostatnich dziesięcioleciach narastało zainteresowanie algorytmami, które w pewien sposób naśladowały procesy występujące w naturze. Takimi procedurami są: programowanie ewolucyjne, algorytmy genetyczne, strategie ewolucyjne, systemy klasyfikujące i sieci neuronowe. Wiele z tych metod (procedur) zastosowano do analizy procesów przerobczych (Fuerstenau, Han 2003; Gupta, Yan 2006; Wills, Napier-Munn 2006).

Stosowanie heurystycznych modeli matematycznych procesów przerobczych musi być skojarzone z doбором wartości parametrów występujących we wzorach, które zależą od konkretnych warunków charakteryzujących proces będący przedmiotem zainteresowania. Estymacja parametrów musi być prowadzona metodami statystycznymi i dokładność estymacji staje się bardzo istotnym zagadnieniem. W wielu przypadkach wskazane jest stosowanie nieklasycznych (niestandardowych) metod statystycznych, polegających na odejściu od procedur związanych z założeniami metod klasycznych, które ograniczają ich zastosowania.

Materiał ziarnisty, który jest poddawany procesom przerobczym ma wiele cech, decydujących o jego podatności na określony sposób wzbogacania lub rozdziału. Takimi cechami są: zawartości składników i stopnie ich uwolnienia, wielkości ziaren, gęstości ziaren, właściwości fizykochemiczne oraz inne właściwości geometryczne (np. kształt) i fizyczne. Podatność materiału na określony sposób rozdziału powinna więc być charakteryzowana za pomocą analizy rozkładów wielowymiarowego wektora cech. Zmiana charakteru rozkładu tego wektora w trakcie procesów przygotowania nadawy do wzbogacania decyduje o wynikach przebiegu procesów (pracy zakładu przerobczego). Analizy rozkładów wielowymiarowych są utrudnione i dlatego rzadko stosowane.

Omówimy teraz kolejno wymienione wyżej problemy modelowania procesów przeróbki surowców mineralnych.

1. Symulacja i optymalizacja pracy procesów przerobczych

Zadanie maksymalnego wykorzystania techniki komputerowej w analizie procesów przerobczych i ich układów sprowadza się do symulacji ich przebiegów, optymalizacji skutków działania oraz przedstawienia założeń projektowych dla urządzeń i ich zestawów. Podstawą realizacji tak postawionego zadania są odpowiednie modele matematyczne procesów.

Stosowanymi technikami optymalizacyjnymi są:

- zmodyfikowana metoda kompleksowa,
- metoda poszukiwania losowego (Monte Carlo),
- programowanie liniowe,
- procedury numeracyjne i kombinatoryczne,

- poszukiwanie bezpośrednie,
- teoria potencjału łańcuchów Markowa,
- metoda dekompozycji.

Każda z tych technik posiada jakieś mankamenty. Zmodyfikowana metoda kompleksowa jest bardzo wrażliwa na przyjęte wstępnie wartości zmiennych decyzyjnych, a metoda poszukiwania losowego bardzo wolno dochodzi do rozwiązania optymalnego. Programowanie liniowe zakłada liniowość funkcji celu i ograniczeń. Procedury numeracyjne i kombinatoryczne – stosowane do poszukiwania optymalnego układu – nie zawsze odpowiednio generują rozwiązanie optymalne. Wyniki metody poszukiwania bezpośredniego dla flotacji są bardzo zależne od żądanego poziomu uzysku i zawartości w koncentracie. Teoria potencjału łańcuchów Markowa zakłada, że żądany poziom uzysku koncentratu o danej zawartości jest niezależny od zmian przepływu (masy) w urządzeniu (maszynie). Metodę dekompozycji zastosowano, uwzględniając empiryczne metody projektowania i zasady praktyczne w celu generowania wartości początkowych zmiennych (punkt startu), a także macierzy przejść (w celu poprawy wartości funkcji celu) (Scheda i in. 1997).

Bardzo szeroko rozpowszechnionym w badaniach przerobczych sposobem optymalizacji jest metoda algorytmów genetycznych, które rozwiązują wiele, zdecydowanie nieliniowych problemów i są względnie łatwe w zastosowaniach. Literatura dotycząca zastosowania algorytmów genetycznych jest bardzo bogata i różnorodna (Svedensten, Evertsson 2005; Goldberg 1998).

Zasada działania algorytmów genetycznych oparta jest na zaobserwowanych w naturze procesach rządzących naturalną ewolucją organizmów żywych. Ogólnie metody te określane są jako obliczenia ewolucyjne (*Evolutionary Computation*). Początkowo rozwijały się one w kilku ośrodkach naukowych niezależnie, prowadząc do powstania kilku podejść. Obecnie przyjmuje się, że dzielą się one na algorytmy genetyczne, programowanie ewolucyjne, strategię ewolucyjną oraz programowanie genetyczne. Powstają również algorytmy łączące cechy kilku wymienionych metod. Należy również wspomnieć, że znanych jest kilkaset operatorów krzyżowania oraz mutacji, co daje ogromne możliwości eksperymentowania przy tworzeniu systemów opartych na obliczeniach ewolucyjnych. Przykładami zastosowań algorytmów genetycznych są problemy związane z podstawowym dla przeróbki prawem zachowania masy, zapisywanym w różnych postaciach. Jedną z nich jest równanie całkowite Fredholma (Tumidajski 1997), którego uszczegółowienie może być sprowadzone do problemu określenia składowych mieszaniny rozkładów zmiennych losowych.

Idea główna algorytmów genetycznych oparta jest na zasadach procesu ewolucji organizmów żywych. W procesie tym rodzice przekazują następnemu pokoleniu informację genetyczną (w pewnych losowych przypadkach nieco zmutowaną). Przetrawianie osobników i w konsekwencji zdolności rozrodcze gwarantują odpowiednią jakość materiału genetycznego, która zapewnia dążenie populacji do wypracowania najlepszych cech przystosowawczych do życia w określonym ekosystemie. Poszukiwanie rozwiązania problemu optymalizacyjnego polega więc na przekształcaniu początkowej populacji osobników w celu uzyskania kolejnej, złożonej z osobników, dla których wartość funkcji przystosowania jest

bliższa optimum. Przekształcenie to dokonuje się poprzez operacje krzyżowania, mutacji oraz selekcji działających na wzór wspomnianych wcześniej procesów biologicznych (Goldberg 1998; Michalewicz 2003).

Jako przykład zastosowania obliczeń ewolucyjnych omówimy problem optymalizacji pracy kruszarki. Modelowanie matematyczne pracy kruszarek prowadzone jest różnymi metodami, między innymi na podstawie macierzowych modeli rozdrabniania, które zawierają wiele specyficznych ograniczeń i analiz zachowania się ziaren w komorze roboczej kruszarek (Lynch 1997). W pracy (Gawenda 2004) przyjęto uproszczoną metodę określenia modelu, pozwalającego prognozować przebieg krzywych składu ziarnowego produktu rozdrabniania. Zgodnie z powszechnym potwierdzeniem faktu, że krzywe składu ziarnowego produktu rozdrabniania w kruszarkach można opisać cenzurowanymi charakterystykami funkcyjnymi rozkładu Weibulla (Rosina-Rammlera) (Cardu i in. 1993) możemy zapisać

$$\Phi(d) = 1 - e^{-c \left(\frac{d}{d_{\max} - d} \right)^n} \quad (1)$$

gdzie:

- $\Phi(d)$ – dystrybuanta wielkość ziarna produktu,
- d_{\max} – maksymalna wielkość ziarna,
- c, n – parametry zależne od charakterystyk kruszarki.

W celu wyznaczenia zależności pomiędzy wielkościami opisującymi kruszarkę szczękową (szerokością szczeliny e , skokiem szczęki ruchomej s , prędkością obrotową wału częstotliwością drgań szczęki p) oraz parametrem opisującym zwięzłość nadawy (współczynnik Protodiakonowa) a parametrami wzoru wykonano eksperyment czynny dla pięciu materiałów. Dla każdej operacji kruszenia w eksperymencie wyznaczono równanie krzywej składu ziarnowego produktu, a wartości parametrów wzorów skorelowano z warunkami doświadczeń. Uzyskano zadowalające wyniki dla przybliżeń liniowych funkcji $c = f_1(e, s, p)$, $d_{\max} = f_2(e, s, p)$ oraz $n = f_3(e, s, p)$. Łącząc uzyskany w ten sposób model kruszarki szczękowej z określeniem jej wydajności

$$Q = 75(2e + s)slp\varphi\rho \quad (2)$$

gdzie:

- l – długość komory roboczej kruszarki [m],
- φ – współczynnik wypełnienia (0,25–0,75),
- ρ – gęstość rozdrabnianego materiału [Mg/m^3],

uzyskuje się podstawowe wzory do prowadzenia symulacji pracy kruszarki.

Konstruując konkretny matematyczny model rozdrabniania w kruszarce przyjęto, że na wyjściu z kruszarki otrzymujemy rozdrobniony produkt podzielony na 4 klasy.

Klasa produktu zależy od wielkości otrzymanego ziarna. Cena produktu zależy od jego klasy.

Rozwiązanie problemu sprowadza się do wyznaczenia ustawień urządzenia:

- e – szerokość szczeliny wylotowej [m],
- s – skok szczeliny ruchomej [m],
- p – liczba obrotów wału głównego [obr/min],

przy ograniczeniach:

- $e_d \text{ mm} \leq e \leq e_g \text{ mm}$
- $s_d \text{ mm} \leq s \leq s_g \text{ mm}$
- $p_d \text{ obr/min} \leq p \leq p_g \text{ obr/min}$

w ten sposób, aby wyrażenie (kryterium oceny)

$$Z = \sum_{h=1}^4 \left(C_h - \mu_h \left(K_{tona} + \frac{K_{godzina}}{Q} \right) - K_{pocz} \right) Q \gamma_h \quad (3)$$

przyjęto jak największą wartość, gdzie:

- C_h – cena wyrobu klasy h ,
- K_{tona} – koszt zmienny na tonę,
- $K_{godzina}$ – koszt zmienny na godzinę,
- K_{pocz} – koszt początkowy,
- Q – wydajność jednostki (wzór (2)),
- μ_h – mnożnik,
- γ_h – wychód produktu h -tej klasy ze wzoru (1).

Opierając się na opisanym wyżej modelu matematycznym skonstruowano algorytm, znajdujący optymalne parametry ustawień urządzenia. Przyjęto, że populacja $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n = 1, \dots, N$, standardowo składa się z 1000 osobników. Każdy osobnik reprezentuje rozwiązanie, czyli zawiera trzy wartości rzeczywiste reprezentujące ustawienia urządzenia, czyli $x_i = (e_i, s_i, p_i)$, $i = 1, \dots, 1000$,

gdzie:

- e_i – szerokość szczeliny wylotowej [m],
- s_i – skok szczeliny ruchomej [m],
- p_i – ilość obrotów wału głównego [obr/min].

Osobniki te poddawane są operatorom krzyżowania, mutacji oraz selekcji.

Zadaniem selekcji jest wybór z danej populacji osobników najlepiej przystosowanych w sensie założonego kryterium.

Schematycznie działanie całego algorytmu będzie podobne do opisanego wcześniej, mianowicie:

- wygenerowanie wartości losowych populacji początkowej złożonej z k osobników;
- wykonanie na populacji mutacji z zadaniem prawdopodobieństwem;

- wygenerowanie zbioru potomków przy użyciu operatora krzyżowania. Należy wybrać losowo k par osobników oraz wykonać na każdej parze operator krzyżowania;
- selekcja; wybór następnej populacji złożonej z k osobników spośród zbioru zawierającego $2 \cdot k$ osobników (k rodziców oraz k potomków);
- jeśli najlepszy osobnik nie spełnia przyjętych oczekiwań – przejście do wykonania kroku 2;
- koniec działania algorytmu.

Na podstawie przedstawionego wcześniej algorytmu, powstał system znajdujący optymalne ustawienia przy procesie rozdrabniania z punktu widzenia zysku w sensie prezentowanego modelu matematycznego. Korzystanie z systemu sprowadza się do ustalenia parametrów, uruchomienia ewolucji oraz odczytania i analizy wyników (Tumidajski i in. 2009).

2. Niestandardowe metody statystyki matematycznej

Wiele zagadnień związanych z opisem matematycznym charakterystyk materiałów uziarnionych i procesów ich przeróbki wymaga odejścia od utartych ścieżek analiz uznanymi metodami statystycznymi ze względu na nietypowość występujących rozkładów zmiennych, sposobów opróbowania, a także możliwość zastosowania rozwiniętych technik i programów komputerowych. Zostaną skrótowo przedstawione metody bootstrapowe, bayesowskie oraz nieparametryczne (Domański, Pruska 2000; Gajek, Kałużka 2000).

Jeżeli jedynym dostępnym źródłem informacji o rozkładzie cechy jest dystrybuanta empiryczna \hat{F} uzyskana na podstawie próbki $x = (x_1, \dots, x_n)$, to tworzymy prostą próbkę losową $x^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)$, nazywaną bootstrapową, poprzez n -krotne losowanie ze zwracaniem spośród wartości oryginalnej próbki x_1, \dots, x_n , a uzyskane wyniki przetwarzamy uzyskując tzw. repliki bootstrapowe T^* statystyki T , tzn. $T^* = T(X^*)$.

Uzyskiwane wartości T^* pozwalają na wyznaczenie średnich wartości estymatora badanego parametru. Przyjmuje się, że uwzględnia się przynajmniej 1000 próbek bootstrapowych (Domański, Pruska 2000). Przykładem zastosowań metody bootstrapowej w badaniach przeróbczych są prace Niedoby i Foszcza (Foszcz 2003, 2004, 2005; Niedoba 2003a, 2005).

Metody bayesowskie stosuje się w celu zwiększenia dokładności wyznaczenia wartości estymowanych parametrów rozkładów zmiennych losowych.

Jeżeli założymy, że $f(x|\Theta)$ jest łączną funkcją prawdopodobieństwa lub łączną funkcją gęstości próbki losowej $x = (x_1, \dots, x_n)$ zależnej od parametru Θ , którego rozkład jest określony przez funkcję g (funkcję gęstości lub prawdopodobieństwa), to łączny rozkład zmiennej losowej X i parametru Θ jest określony przez funkcję

$$h(x, \Theta) = f(x|\Theta)g(\Theta) \quad (4)$$

Jeżeli znamy tę funkcję to możemy wyznaczyć rozkład warunkowy parametru Θ stosując wzór będący uogólnieniem wzoru Bayesa

$$g(\Theta|x) = \begin{cases} \frac{kf(x|\Theta)g(\Theta)}{\sum_k f(x|\Theta_k)g(\Theta)} & \text{gdy } \Theta \text{ ma rozkład skokowy o funkcji prawd. } g \\ \frac{f(x|\Theta)g(\Theta)}{\int_{\Omega} f(x|\Theta)g(\Theta)d\Theta} & \text{gdy } \Theta \text{ ma rozkład ciągły o funkcji gęstości } g \end{cases} \quad (5)$$

Rozkład ten nazywa się rozkładem *a posteriori* parametru Θ .

Dodatkowo, gdy funkcja $L(\Theta, d)$ jest funkcją straty przy rozkładach *a priori* i *a posteriori* parametru Θ , a decyzja $d \in D$, to estymatorem bayesowskim parametru Θ jest statystyka d_0 spełniająca warunek:

$$E_{\Theta}L(\Theta, d_0) = \inf_{d \in D} E_{\Theta}L(\Theta, d) \quad (6)$$

Szerokie zastosowanie metod bayesowskich w zakresie badań przerobczych przedstawił Niedoba (2003a, b, 2008a, b).

Nieparametryczne metody statystyczne stosowane są przede wszystkim wtedy, gdy potrzebna jest zwiększona dokładność opisu potrzebnych funkcji gęstości rozkładu. Zwraca się uwagę na metody aproksymacji funkcji gęstości metodami jądrowymi i metodą Fouriera.

Dla zadanej próbki losowej (x_1, \dots, x_n) estymator jądrowy gęstości definiuje się wzorem

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (7)$$

gdzie x_1, \dots, x_n oznacza realizację próbki, natomiast $h > 0$ jest parametrem zwanym szerokością pasma lub parametrem wygładzającym. Funkcja K nazywana jest funkcją jądrową lub jądrem i spełnia warunek unormowania do jedności, czyli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = 1 \quad (8)$$

W roli funkcji jądrowej występuje najczęściej jądro Epanecznikowa

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}b} \left(1 - \frac{1}{5b^2}\right) x^2 & \text{dla } |x| \leq b\sqrt{5} \\ 0 & \text{dla } |x| > b\sqrt{5} \end{cases} \quad (9)$$

gdzie b to parametr skali $\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx = b^2 \right)$ oraz jądro Gaussa

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \in R \quad (10)$$

Inną metodą nowoczesnej teorii nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej jest jej aproksymacja przy użyciu szeregu Fouriera (Chentsov 1962; Efron, Tibshirani 1993; Efromovich 1999). Jeżeli $f(x)$ przedstawia gęstość badanego rozkładu, to korzystając z teorii szeregów Fouriera możemy ją przedstawić w postaci

$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \varphi_j(x)$, gdzie Q_j oznaczają współczynniki Fouriera określone wzorem

$$Q_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$$

A funkcja $\varphi_j(x)$ wzorem

$$\varphi_j(x) \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ \sqrt{2} \cos \pi j x & \text{dla } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Estymatorem gęstości badanego rozkładu jest suma częściowa szeregu Fouriera

$f_j(x) = \sum_{j=0}^J Q_j \varphi_j(x)$, w którym J nazywamy parametrem obcięcia lub ogólniej

$$f_j(x, \{\omega_j\}) = \sum_{j=0}^J \omega_j Q_j \varphi_j(x) \quad (13)$$

gdzie $x \in [0,1]$ oraz $\omega_j \in [0,1]$.

Metodę estymacji jądrowej oraz szeregów Fouriera zastosował Niedoba (Niedoba 2004; Niedoba, Tumidajski 2006; Niedoba, Soliński 2009), zarówno do krzywych składu ziarnowego jak i funkcji gęstości rozkładu gęstości materiału uziarnionego.

3. Wielowymiarowe charakterystyki materiałów uziarnionych

W przeróbce surowców mineralnych, rozkłady jednowymiarowe nie zawsze dają pełnię informacji na temat rozpatrywanego materiału. W przypadku węgla (najłatwiejszego z punk-

tu widzenia wykonywania analiz dotyczących gęstości, wielkości ziarna i cech określających zawartości składników), z technologicznego i statystycznego punktu widzenia najbardziej interesujące są trzy zależności opisujące wzajemne związki pomiędzy wielkością ziarna D , gęstością ziarna P oraz średnią zawartością popiołu Λ , tzn. dystrybuanta $F = F(d, \rho)$, uzysk $E = E(d, \rho)$ oraz $\lambda = \lambda(d, \rho)$.

Uzysk jest definiowany jako stosunek ilości popiołu (lub innego składnika) w danym produkcie do ilości popiołu (tegoż składnika) w nadawie i może być interpretowany jako dystrybuanta wektora losowego (D, P) . Możemy więc przyjąć, że:

$$E(d, \rho) = P_c(D < d, P < \rho) \quad (14)$$

przy czym prawdopodobieństwo P_c jest prawdopodobieństwem geometrycznym (stosunek mas popiołu) (Fisz 1969). Metody opisu dystrybuant $F(d, \rho)$ oraz $E(d, \rho)$ (geometrycznie rzecz biorąc – powierzchni) ze statystycznego punktu widzenia są identyczne. Zależność $\lambda = \lambda(d, \rho)$ jest funkcją regresji pierwszego rodzaju dla wektora (D, P, Z) gdzie Z jest zawartością popiołu (innego składnika) w ziarnie, ponieważ λ jest traktowane i mierzone jako średnia zawartość popiołu (składnika) w wąskiej „klaso-fracji”, czyli przedziale uogólnionym:

$$d \leq D \leq d + dd \quad (15)$$

$$\rho \leq P \leq \rho + d\rho \quad (16)$$

Wspomniane wyżej zależności pozwalają opisywać zagadnienia związane z rozdziałem materiałów oraz planowanie i projektowanie układów wzbogacania, a także pozwalają ujednoczyć metody opisu statystycznego i interpretacji.

Rozważając możliwości poszukiwania postaci funkcji rozkładu $F(d, \rho)$ można stwierdzić, że w tym zakresie istnieją trzy drogi:

- weryfikacja założeń o niezależności stochastycznej zmiennych D i P oraz wynikających z tego konsekwencji,
- użycie pewnych wybranych typów rozkładów dwuwymiarowych z ewentualnymi transformacjami zmiennych,
- oparcie się na obrazie geometrycznym dystrybuant empirycznych i opis badanych powierzchni fragmentami (Eadie i in. 1971; Fisz 1969; Tumidajski 1992).

W ostatnich latach zaczyna się stosować różne metody wizualizacji wielowymiarowych danych, które mogą być pomocne przy budowie modeli procesów oraz przy charakterystyce materiałów. Należy tu wymienić metodę tuneli obserwacyjnych oraz metodę osi równoległych (Jamróz 2003; Zaborski 1997).

Zakończenie

Przedstawiony zestaw problemów i rozwiązań w zakresie nieklasycznych metod statystycznych i obliczeniowych jest zbiorem istotnych zagadnień badawczych, które w najbliższym czasie będą przedmiotem dalszych efektywnych badań. Należy podkreślić, że dynamiczny rozwój nauk technicznych i związanych z nimi problemów ekonomicznych wymaga stosowania nowych, bardziej odpowiednich i precyzyjnych metod badawczych i pogłębionych analiz ilościowych. Zastosowania matematyki w zakresie nauk technicznych – a w szczególności w problemach przeróbki surowców mineralnych – idą praktycznie w kierunkach:

- wdrażania nowych metod matematycznych w opisie materiałów i procesów (przede wszystkim metod statystyki nieklasycznej),
- doskonalenia metod optymalizacji i projektowania układów technologicznych,
- stosowania doskonalszych metod numerycznych w rozwiązywaniu zagadnień związanych z modelami matematycznymi przeróbki surowców.

Rozwój metod obliczeniowych (numerycznych) doprowadził zagadnienia modelowania matematycznego układów technologicznych oraz prognozowania wyników do stosowania sieci neuronowych, które dają praktycznie idealne odpowiedzi bez udziału autora problemu. Znacznie lepszym, z punktu widzenia aktywnego podejścia do modelowania przez prowadzącego badania, jest zastosowanie obliczeń ewolucyjnych.

Od kilkunastu lat stosowane są algorytmy genetyczne jako komputerowy sposób rozwiązywania wielu z przedstawionych zagadnień optymalizacyjnych. Posiadają one wiele zalet, które poszerzają i udoskonalają procedury optymalizacyjne. Są to:

- brak wstępnych założeń odnośnie zmiennych decyzyjnych, potrzebne są tylko ich ograniczenia,
- algorytm genetyczny wykorzystuje tylko wartości funkcji celu a nie np. jej gradienty,
- algorytm genetyczny może rozwiązywać zagadnienia o jednej, dwu- lub wielu funkcjach celu,
- zdolność kodowania (przeliczania) wartości zmiennych decyzyjnych i ograniczeń jest bardzo duża.

W klasycznych metodach statystycznych występują założenia ograniczające możliwości ich stosowania i ich niespełnienie może prowadzić do niewłaściwych rozwiązań. Generalnie należy zgodzić się z tezą Rao (1994): „Statystyka matematyczna jest bardziej sposobem myślenia lub wnioskowania niż pęczkiem recept na mlócenie danych w celu odsłonięcia odpowiedzi”. Teza ta wymusza, między innymi, stosowanie niekonwencjonalnych podejść do zagadnień modelowania procesów przeróbki surowców mineralnych.

LITERATURA

- Cardu M., Clerici C., Morandini A., Ocella E., 1993 – An experimental research on the comminution law and work index in jaw. Proceedings of XVIII International Mineral Processing Congress, Sydney.
- Chentsov N. N., 1962 – Evaluation of an unknown distribution density from observations. Soviet Math. Dokl. 3, pp. 1159–1562.
- Domański C., Pruska K., 2000 – Nieklasyczne metody statystyczne. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Eadie W.T., Drijard D., Janas F.E., Ross M., Sadoulet B., 1971 – Statistical methods in experimental physics. North-Holland.
- Efromovich S., 1999 – Nonparametric curve estimation. New York, Springer-Verlag.
- Efron B., Tibshirani R.J., 1993 – An introduction to the Bootstrap. Chapman and Hall, London.
- Fisz M., 1969 – Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Warszawa PWN.
- Foszcz D., 2005 – Estymacja parametrów funkcji regresji metoda klasyczna oraz metodami bootstrapowymi. Górnictwo i Geoinżynieria, z 3/1, pp. 67–78.
- Foszcz D., 2004 – Ocena dokładności estymacji charakterystyk parametrycznych zmiennych losowych za pomocą metod bootstrapowych. Górnictwo i Geoinżynieria, z. 2/1, pp. 13–20.
- Foszcz D., 2003 – Zastosowanie metod bootstrapowych do bilansowania produkcji na przykładzie O/ZWR KGHM „Polska Miedź” S.A. Górnictwo i Geoinżynieria, z. 3, pp. 64–69.
- Fuerstenau M.C., Han K.N., 2003 – Principles of Mineral Processing. SME.
- Gajek L., Kałuska M., 2000 – Wnioskowanie statystyczne. Warszawa, WNT.
- Gawenda T., 2004 – Ocena wpływu właściwości fizyko-chemicznych surowców skalnych i parametrów technologicznych kruszarek szczękowych na efekty rozdrabniania. Rozprawa doktorska, AGH, Kraków.
- Goldberg D.E., 1998 – Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Gupta A., Yan D.S., 2006 – Mineral Processing Design and Operation, Elsevier.
- King R.P., 2001 – Modeling and simulation of mineral processing systems. Butterworth-Heinemann.
- Jamróz D., 2003 – Wizualizacja wielowymiarowych zbiorów danych dyskretnych. IV Krajowa Konferencja Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim, pp. 351–354, Kraków.
- Lynch A.J., 1997 – Mineral crushing and grinding circuits. Amsterdam Oxford, New York.
- Michalewicz Z., 2003 – Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Niedoba T., 2003a – Ocena jakości produktu przy pomocy metod bayesowskich na przykładzie złoża „Rudna”, Inżynieria Mineralna, n. 3, pp. 134–141.
- Niedoba T., 2003b – Różne aspekty wyznaczania wielkości próbki pobieranej z materiałów uziarnionych. Prace Naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej nr 103, Oficyna Wydawnicza PW, Wrocław, pp. 285–291.
- Niedoba T., 2004 – The utilization of non classical statistical methods in the raw materials’ quality estimation – the estimation of economical risk. Proceedings of 8th International conference on Environment and Mineral Processing, Ostrava.
- Niedoba T., 2005 – Opracowanie zasad opróbowania i analizy jakości surowców mineralnych metodami statystyki nieklasycznej. Praca doktorska, AGH.
- Niedoba T., 2008a – Approximation of particle size composition curves by Bayesian estimators of Weibull distribution function parameters with application of cut normal distribution function. 21st World Mining Congress & Expo 2008, Agencja Wydawniczo-Reklamowa Ostojka, Kraków.
- Niedoba T., 2008b – Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą bayesowskich estymatorów parametrów w rozkładzie Weibulla. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo, z. 284, pp. 97–105.
- Niedoba T., Soliński B., 2009 – Aproksymacja rozkładu prędkości wiatru za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych. [W:] Konwersja odnawialnych źródeł energii, red. Aleksander Lisowski, pp. 52–58, Wydawnictwo Wieś Jutra, Warszawa.

- Niedoba T., Tumidajski T., 2006 – The approximation of grain composition curves by non-parametric statistical methods. XXIII International Mineral Processing Congress, vol. 1, pp. 203–209, Istanbul.
- Rao C.R.: Statystyka i prawda. Wydawnictwo PWN, Warszawa, 1994.
- Schena G., Zanin M., Chiarandini A., 1997 – Procedures for the automatic design of flotation networks. International Journal of Mineral Processing, vol. 52, pp. 137–160.
- Svedensten P., Evertsson C.M., 2005 – Crushing plant optimisation by means of a genetic evolutionary algorithm. Minerals Engineering, vol. 18, pp. 473–479.
- Tumidajski T., Foszcz D., Jamróz D., Niedoba T., Saramak D., 2009 – Niestandardowe metody statystyczne i obliczeniowe w opisie procesów przeróbki surowców mineralnych. Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Tumidajski T., 1997 – Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału. Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Tumidajski T., 1992 – Wybrane problemy stochastycznej analizy własności materiałów uziarnionych i procesów przeróbki surowców mineralnych. Zeszyty Naukowe AGH, Górnictwo 159, Kraków.
- Wills B.A., Napier-Munn T.J., 2006 – Mineral Processing Technology. Butterworth-Heinemann.
- Zaborski A., 1997 – Przegląd zastosowań skalowania wielowymiarowego w rozwiązywaniu problemów marketingowych. Wydawnictwo A.E., Klasyfikacja i analiza danych, vol. 4, Wrocław.

AKTUALNE TENDENCJE W OPISIE I MODELOWANIU MATEMATYCZNYM PROCESÓW PRZERÓBKI MATERIAŁÓW UZIARNIONYCH

Słowa kluczowe

Przeróbka surowców, matematyczne modelowanie, programowanie ewolucyjne, nieklasyczne metody statystyczne, kruszarka szczękowa

Streszczenie

Wiele konwencjonalnych metod i technik modelowania matematycznego ma ograniczone zastosowania w odniesieniu do układów przeróbki surowców mineralnych, a uzyskiwane modele mają specjalne cechy i ograniczenia. Masowe zastosowanie komputerów doprowadziło do tego, że klasyczne problemy projektowania i poszukiwanie optymalnych warunków stały się zadaniem z zakresu informatyki i odpowiednich procedur obliczeniowych.

W artykule omówiono dość szeroko zastosowanie programowania ewolucyjnego do doboru optymalnych warunków pracy kruszarek szczękowych (wzory (1), (2) i (3)), prowadzące do projektów układów rozdrabniania.

W wielu przypadkach wskazane jest stosowanie nieklasycznych (niestandardowych) metod statystycznych, z których omówiono metody bootstrapowe, metody bayesowskie i nieparametryczne sposoby estymacji gęstości rozkładów właściwości materiałów uziarnionych.

Zostało także ogólnie scharakteryzowane wielowymiarowe podejście do opisu właściwości materiałów, ze zwróceniem uwagi na ich specyfikę.

ACTUAL TENDENCIES IN DESCRIPTION AND MATHEMATICAL MODELING OF MINERAL PROCESSING

Key words

Mineral processing, mathematical modeling, evolutionary programming, non-classical statistical methods, jaw crushers

Abstract

Many conventional methods and mathematical modeling techniques are limited in mineral processing systems applications giving the models of special features and limitations. The global applications lead to the situation where the classical designing tasks and searching for the optimal conditions became the problems from the field of informatics and certain calculating procedures.

The paper presents widely the applications of evolutionary programming to select the optimal conditions for jaw crushers work (formulas (1), (2) and (3)), leading to designs of comminution technological systems.

In many cases the application of non-classical statistical methods, like bootstrap, Bayesian and non-parametric methods of estimation of grained materials characteristics distribution functions is advisable. These methods were discussed in the paper.

Furthermore, the multidimensional approach to the materials characteristics was generally presented, with special attention to their specific character.

