

TOMASZ NIEDOBA\*

## **Elementy metodologii stosowania dwu- i wielowymiarowych rozkładów właściwości materiałów uziarnionych do opisu wzbogacania węgla**

### **Wprowadzenie**

Problemy związane z aproksymacją różnego rodzaju krzywych, tj. krzywych składu ziarnowego, krzywych rozdziału, czy krzywych wzbogacalności są przedmiotem wielu badań i opracowań naukowych, związanych z problematyką przeróbki surowców mineralnych.

Jednym z podstawowych elementów oceny procesów przeróbki jest dokładne oszacowanie rozkładu średniej wartości badanych cech w nadawie i produktach. Do tego celu wykorzystuje się metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Od dawna interesowano się aproksymacją krzywych częstości badanych cech funkcjami gęstości rozkładu określonego typu. Dotyczy to również ich skumulowanych postaci, czyli dystrybuant. Bazowano na znanych z rachunku prawdopodobieństwa klasach funkcji. Z uwagi na fakt, że od rozkładu wielkości ziaren materiału zależą rozkłady innych cech tych ziaren (Allen 1968; Tumidajski 1992) badania krzywych składu ziarnowego cieszyły się szczególnym zainteresowaniem i powstało wiele modeli takich krzywych opartych na znanych z rachunku prawdopodobieństwa rozkładach, jak np.

- rozkład logarytmiczno-normalny,
- rozkład Weibulla,
- rozkład Gaudina-Schuhmanna-Andreyewa.

---

\* Dr inż., AGH Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Katedra Inżynierii Środowiska i Przeróbki Surowców; e-mail: [tniedoba@agh.edu.pl](mailto:tniedoba@agh.edu.pl)

Liczba modeli opisujących rozkłady gęstości ziaren, zawartości składników w ziarnach jest stosunkowo niewielka. Początkowo zakładano, że rozkład gęstości ziaren i zawartości składników mineralnych jest normalny. Dopiero w drugiej połowie ubiegłego stulecia zaczęły pojawiać się prace podważające prawidłowość założenia o normalności tych rozkładów. Szarapow (1966) oraz Gottfried (1981) zaproponowali na podstawie badań empirycznych aproksymację krzywych rozkładu za pomocą rozkładu logarytmiczno-normalnego lub rozkładem wykładniczym.

Wymienione modele krzywych rozkładu są oparte na określonych klasach funkcji, wśród których może nie istnieć funkcja adekwatna do opisu cech badanego materiału. Ten fakt spowodował poszukiwanie innych metod. Nieklasyczne metody statystyczne po raz pierwszy w przeróbce surowców mineralnych zostały zastosowane w 2003 (Niedoba 2003), gdzie zastosowano metody bayesowskie. Ponadto z sukcesami stosowano również metody bootstrapowe, metody jądrowe oraz metodę ortogonalnego szeregu Fouriera (Foszcz 2003; Niedoba 2007).

Oddzielnym zagadnieniem jest kwestia aproksymacji szczególnego typu krzywych, jakimi są krzywe wzbogacalności. Jak wiadomo każdy proces wzbogacania jest ściśle związany ze wzbogacalnością materiału poddawanego temu procesowi, co z kolei jest uzależnione od stopnia uwolnienia ziaren minerałów. Takie uwalnianie dokonuje się przez rozdrabnianie materiału do wielkości ziaren, dla której otrzymany produkt jest mieszaniną względnie wolnych cząstek minerału użytecznego i minerałów skały płonnej (Tumidajski 2012). Mimo, że głębszy przemiał prowadzi do wyższego stopnia uwolnienia, to efekty wzbogacania mogą okazać się gorsze i dlatego dokonuje się oceny wzbogacalności materiału poddawanego procesowi wzbogacania. Do takiej oceny stosuje się, między innymi, krzywą wzbogacalności Henry'ego, będącą – w przypadku węgla – zależnością pomiędzy wychodem i zawartością popiołu ( $\lambda = \lambda(\gamma)$ ), wykreślaną na podstawie wyników analiz densymetrycznych badanego materiału (Drzymała 2001; Gawlik i in. 2004; Róg 2009; Krawczykowski i in. 2012). Jak wynika z powyższych rozważań, charakter takiej krzywej jest uzależniony od stopnia uwolnienia ziaren, a w konsekwencji od ich wielkości. Dlatego w badaniach wzbogacalności wydaje się istotnym uwzględnienie wielkości ziaren. W pracy przedstawiono aproksymacje krzywej wzbogacalności Henry'ego  $\lambda = \lambda(\rho)$  i  $\lambda = \lambda(\gamma)$  oraz powierzchni wzbogacalności  $\lambda = \lambda(d, \rho)$  oraz pewne efekty ich zastosowania.

## 2. Założenia metodologii

W większości procesów przeróbczych wpływ na rozdział ziaren ma więcej niż jedna ich właściwość, tj. np. wielkość ziaren, ich gęstość, zawartość określonego składnika itp. W konsekwencji, do opisu tych procesów należy zastosować zarówno dwu-, jak i wielowymiarowe rozkłady zmiennych losowych. W pracy przedstawiony został opis procesu wzbogacania węgla, przy uwzględnieniu wielkości ziaren, ich gęstości oraz zawartości popiołu.

Podczas realizacji pracy przyjęto następujące założenia i zasady opisu:

1. Całość badanego materiału rozdzielono na  $k$  frakcji, ze względu na gęstość ziaren. Przyjęto, że  $\gamma_i (i = 1, \dots, k)$  oznacza procentowy udział  $i$ -tej frakcji w całości materiału.
2. Przez  $\lambda_i (i = 1, \dots, k)$  oznaczono procentową zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji.
3. Jako podstawową krzywą stosowaną przy opisie procesu wzbogacania przyjęto krzywą Henry'ego  $\lambda = \lambda(\gamma)$ , gdzie  $\lambda$  oznacza zawartość popiołu we frakcji, której udział procentowy wynosi  $\gamma$ .

Przy takich założeniach otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu w badanym materiale wynosi (Stępiński 1964; Tumidajski 1997)

$$\alpha = \int_0^{100} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (1)$$

Jeżeli ustali się, że  $\gamma_0$  oznacza wychód koncentratu, a  $(100 - \gamma_0)$  wychód odpadów to otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu w koncentracie wynosi

$$\vartheta = \frac{1}{\gamma_0} \int_0^{\gamma_0} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (2)$$

Natomiast średnia zawartość popiołu  $\beta$  w odpadach zadana jest wzorem

$$\beta = \frac{1}{100 - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{100} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (3)$$

Przedstawiono analityczny opis funkcji  $\lambda$  oraz jej uogólnienie w przestrzeni trójwymiarowej.

### 3. Eksperyment

Część doświadczalna została podzielona na dwie części: dwuwymiarową aproksymację krzywej wzbogalności Henry'ego na podstawie węgla oraz trójwymiarową powierzchnię wzbogalności.

#### 3.1. Jednowymiarowa krzywa wzbogalności Henry'ego

Przyjęto, że zależność procentowej zawartości popiołu w materiale od jego gęstości przedstawia funkcja  $\lambda_0 = \lambda_0(\rho)$ , oraz że funkcja  $\gamma = F(\rho)$  przedstawia zależność wychodu frakcji od jej gęstości. Ponieważ funkcja  $F(\gamma)$  jest funkcją rosnącą, więc posiada funkcję odwrotną  $\rho = F^{-1}(\gamma)$ . Wobec tego krzywa wzbogalności Henry'ego przyjmuje postać:

$$\lambda = \lambda_0(F^{-1}(\gamma)) \quad (4)$$

Funkcję  $F(\rho)$  najczęściej aproksymuje się za pomocą funkcji opisujących dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych (Dobosz 2001). Najczęściej stosowanymi dystrybuantami rozkładów są:

— rozkład Weibulla (zwany również rozkładem RRB):

$$F(x) = 1 - e^{-(x/a)^b} \quad (5a)$$

— rozkład logistyczny:

$$F(x) = \frac{1}{1 + fe^{-cx}} \quad (5b)$$

— rozkład logistyczny-ucięty:

$$F(x) = \frac{1}{1 + be^{\left(\frac{-gx}{x_0 - x}\right)}} \quad (5c)$$

— rozkład logarytmiczno-normalny:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right) \quad (5d)$$

— rozkład GSA o funkcji gęstości:

$$F(x) = hx^\alpha \quad (5e)$$

gdzie:

- $a, b, c, f, g, h, \alpha$  – parametry rozkładów,  
 $\Phi(\cdot)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$ .

Funkcję  $\lambda_0(\rho)$  wyznaczono jako krzywą regresji drugiego rodzaju dla zależności zawartości popiołu od gęstości materiału  $\rho$ .

W celu przeprowadzenia przedstawionego opisu dokonano rozdziału węgla typu 31, pobranego z jednej kopalń Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego i podzielono na frakcje według gęstości (1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9).

Wyniki doświadczeń przedstawia tabela 1.

TABELA 1

Rozdział węgla na frakcje gęstościowe

TABLE 1

Coal separation into density fractions

$\rho_{j-1} - \rho_j$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Średnia gęstość $\rho_{0i}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Udział procentowy $\gamma_i$ [%]	Udział skumulowany $\gamma_i$ [%]	Zawartość popiołu $\lambda$ [%]
< 1,3	0,65	62,47	62,47	2,61
1,3–1,4	1,35	23,99	86,46	3,77
1,4–1,5	1,45	6,18	92,64	1 732
1,5–1,6	1,55	2,29	94,93	26,08
1,6–1,7	1,65	0,66	96,59	32,48
1,7–1,8	1,75	2,75	98,34	38,34
1,8–1,9	1,85	1,66	100,00	48,32

Do aproksymacji funkcji  $\lambda_0(\rho)$  zastosowane zostały funkcje logistyczne (równanie 5b), osobno dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,4 [g/cm<sup>3</sup>] oraz frakcji o gęstości większej niż 1,41 [g/cm<sup>3</sup>], które połączono na odcinku (1,4–1,41) funkcją liniową. Dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,3 wyznaczono zawartość popiołu w punktach o wartości ich współrzędnej gęstości równych 0,5; 0,8 oraz 1,0 (wielkości czysto teoretyczne, które nie występują w praktyce), stosując metodę krigingu zwyczajnego, a następnie dokonano aproksymacji.

Funkcja  $\lambda_0(\rho)$  ma więc postać

$$\lambda_0(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 5167,27e^{-3,792\rho}} & \text{dla } \rho \leq 1,4 \\ 0,9327\rho - 1,1748 & \text{dla } \rho \in (1,4; 1,41) \\ \frac{1}{1 + 971,25e^{-3,592\rho}} & \text{dla } \rho \geq 1,41 \end{cases} \quad (6)$$

Do wyznaczenia funkcji  $F(\rho)$  użyto rozkładu logistycznego (równanie 5b) oraz rozkładu GSA (równanie 5e), dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,3 [g/cm<sup>3</sup>] wykorzystano punkty otrzymane za pomocą metody krigingu zwyczajnego (Niedoba, Tumidajski 2012).

Otrzymana funkcja  $F(\rho)$  przedstawia się następująco

$$F(\rho) = \begin{cases} 0,0082\rho^{16,5464} & \text{dla } \rho < 1,32 \\ \frac{1}{1 + 272,3427e^{-3,5815\rho}} & \text{dla } \rho \geq 1,32 \end{cases} \quad (7)$$

Do oceny jakości aproksymacji zastosowano błąd średniokwadratowy (zwany również odchyleniem resztowym)  $s_r$ .

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\tilde{f}(\rho_i) - f(\rho_i))^2}{k-2}} \quad (8)$$

gdzie  $\tilde{f}(\rho_i)$  oznacza wartość teoretyczną, a  $f(\rho_i)$  wartość eksperymentalną;  $k-2$  jest ilością pomiarów, pomniejszoną o ilość badanych zmiennych, czyli w tym przypadku 2.

Dla funkcji  $\lambda_0(\rho)$   $s_r = 1,14\%$ , a dla funkcji  $F(\rho)$   $s_r = 0,78\%$ . Można więc uznać, że funkcje te są dobrymi aproksymantami badanych zależności.

Wyniki aproksymacji zamieszczono w tabeli 2 oraz na rysunkach 1 i 2.

Po przekształceniu wzoru 5b otrzymano dla  $x = \rho$ ,  $F(x) = \gamma$

$$\rho = F^{-1}(\gamma) = \frac{1}{c} (\ln b \gamma - \ln(1-\gamma)) \quad (9)$$

A następnie, stosując powyższy wynik we wzorze (7), po przekształceniach uzyskano poniższą zależność

$$\rho = F^{-1}(\gamma) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{0,0082}\right)^{0,0604} & \text{dla } \gamma < 0,8107 \\ 0,1868[\ln(272,342\gamma) - \ln(1-\gamma)] & \text{dla } \gamma > 0,8107 \end{cases} \quad (10)$$

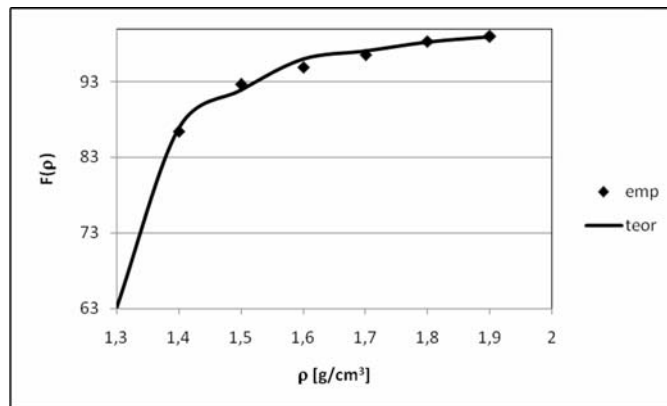
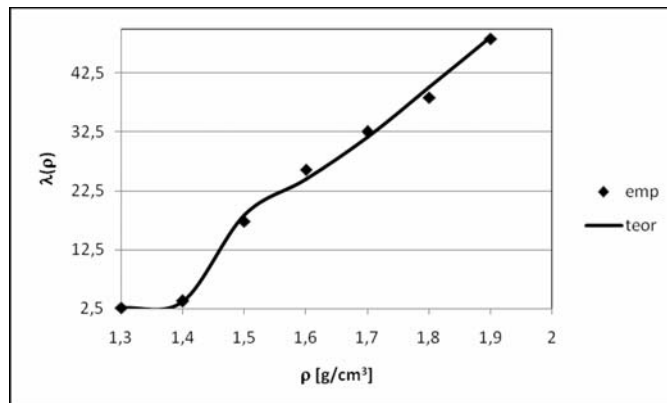
TABELA 2

Wyniki doświadczalne i teoretyczne dla funkcji  $\lambda_0(\rho)$  i  $F(\rho)$

TABLE 2

Experimental and theoretical results for function  $\lambda_0(\rho)$  and  $F(\rho)$

Gęstość $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$F_0(\rho)$ doświadczalna	$F(\rho)$ teoretyczna	Zawartość popiołu $\lambda(\rho)$ [%] doświadczalna	Zawartość popiołu $\lambda_0(\rho)$ [%] teoretyczna
1,3	62,47	63,00	2,61	2,60
1,4	86,46	86,82	3,77	3,78
1,5	92,64	91,84	17,32	18,40
1,6	94,93	95,95	26,08	24,42
1,7	96,59	97,04	32,48	31,63
1,8	98,34	98,25	38,34	39,96
1,9	98,96	98,96	48,32	48,70

Rys. 1. Wykres aproksymowanej funkcji  $F(\rho)$ Fig. 1. Plot of approximated function  $F(\rho)$ Rys. 2. Wykres aproksymowanej funkcji  $\lambda_0(\rho)$ Fig. 2. Plot of approximated function  $\lambda_0(\rho)$ 

Ostatecznie funkcja  $\lambda_1(\gamma) = \lambda_0(F^{-1}(\gamma))$  ma postać

$$\lambda_1(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 5167,27e^{-5,0698\gamma^{0,0604}}} & \text{dla } \gamma > 0,8107 \\ \frac{1}{1 + 5167,27e^{-0,7085(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + 5,607)}} & \text{dla } \gamma \in [0,8107; 0,8682] \\ 0,1742(\ln \gamma - \ln(1-\gamma)) - 0,198 & \text{dla } \gamma \in (0,8682; 0,8742) \\ \frac{1}{1 + 971,25e^{-0,6712(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + 5,607)}} & \text{dla } \gamma > 0,8742 \end{cases} \quad (11)$$

Wartości  $\lambda_1(\gamma)$  przedstawiono w tabeli 3 oraz na rysunku 3.

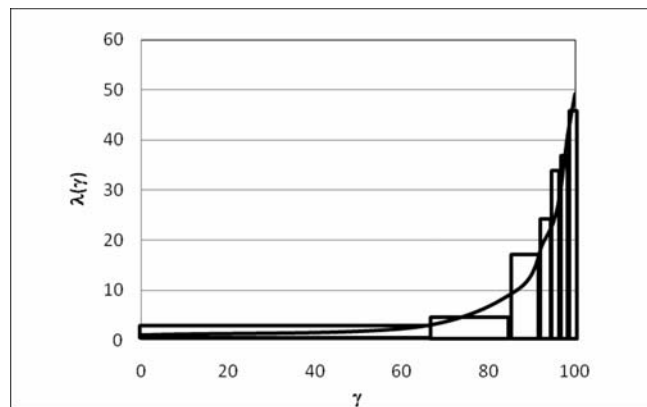
TABELA 3

Wartości funkcji wzbogacalności  $\lambda_1(\gamma)$

TABLE 3

Values of beneficiation function  $\lambda_1(\gamma)$

$\gamma$ [%]	$\lambda_1(\gamma)$ [%]
62,47	2,59
86,46	3,63
92,64	19,51
94,93	23,76
96,59	29,35
98,34	40,72
100,00	49,24



Rys. 3. Funkcja wzbogacalności Henry'ego  $\lambda_1(\gamma)$

Fig. 3. Henry's beneficiation curve  $\lambda_1(\gamma)$

Funkcję  $\lambda(\gamma)$  można aproksymować również w inny sposób, a mianowicie korzystając z faktu, że  $\gamma \in [0, 1]$  oraz wartości skumulowanego  $\gamma$  stanowią ciąg rosnący, można aproksymować funkcję  $\gamma = \Phi(\lambda)$  funkcjami opisującymi dystrybuanty zmiennej losowej, a następnie wyznaczając funkcję odwrotną  $\gamma = \Phi^{-1}(\lambda)$  uzyskuje się poszukiwaną zależność.

Do aproksymacji funkcji  $\gamma(\lambda)$  zastosowano połączenie dwóch funkcji typu logistycznego (równanie 5b) (wartość w punkcie  $\lambda = 0,1$  została wyznaczona za pomocą metody krigingu zwyczajnego) otrzymano:



$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 0,9955e^{-13,794\lambda}} & \text{dla } \lambda < 0,1 \\ \frac{1}{1 + 0,5750e^{-8,2088\lambda}} & \text{dla } \lambda > 0,1 \end{cases} \quad (12)$$

Jeżeli funkcja  $\gamma(\lambda) = \frac{1}{1 + be^{-c\lambda}}$  to funkcja do niej odwrotna jest postaci

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{c} (\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + \ln b) \quad (13)$$

Stosując powyższy związek dla równania (12) otrzymuje się następującą postać szukanej funkcji

$$\lambda_2(\gamma) = \begin{cases} 0,0257 & \text{dla } \gamma < 0,51 \\ 0,07258 (\ln \gamma - \ln(1-\gamma) - 0,0045) & \text{dla } \gamma \in (0,51; 0,7993) \\ 0,1218 (\ln \gamma - \ln(1-\gamma) - 0,5533) & \text{dla } \gamma \in (0,7993; 0,99) \\ 0,4923 & \text{dla } \gamma \in (0,99; 1) \end{cases} \quad (14)$$

Wyniki aproksymacji powyższą funkcją zaprezentowano w tabeli 4 oraz na rysunku 4.

Wartość średnia  $\bar{\lambda}$  zawartości popiołu w całości materiału jest wówczas zadana wzorem (15).

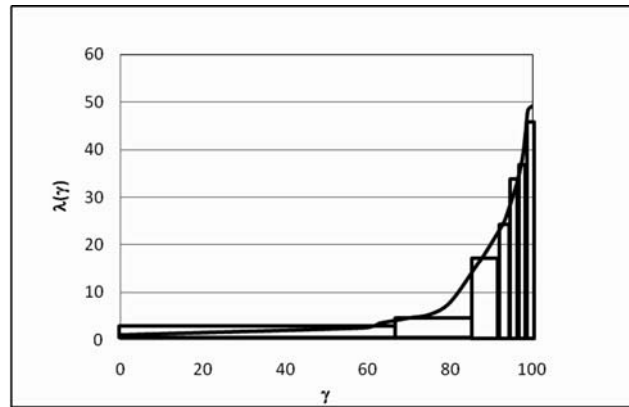
TABELA 4

Wartości funkcji wzbogacalności  $\lambda_2(\gamma)$ 

TABLE 4

Values of beneficiation function  $\lambda_2(\gamma)$ 

$\lambda$ doświadczalne	$\gamma(\lambda)$ (równanie 12)	$\gamma$ [%] (doświadczalne)	$\lambda_2(\gamma)$ [%] (równanie 14)
2,61	59,00	62,47	3,60
3,77	62,82	86,46	15,84
17,32	87,82	92,64	24,10
26,08	93,67	94,93	28,95
32,48	96,16	96,59	33,99
38,35	97,59	98,34	42,97
48,32	98,92	100,00	49,23

Rys. 4. Funkcja wzbogacalności Henry'ego  $\lambda_2(\gamma)$ Fig. 4. Henry's beneficiation curve  $\lambda_2(\gamma)$ 

$$\bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda(\gamma) d\gamma \quad (15)$$

Natomiast jeżeli  $\bar{\lambda}_\tau$  oznacza średnią zawartość procentową popiołu w  $i$ -tej frakcji w stosunku do całości materiału to  $\bar{\lambda}_\tau$  jest zadana wzorem

$$\bar{\lambda}_\tau = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (16)$$

gdzie  $\gamma_{i-1}$  oznacza skumulowany wychód frakcji  $(i-1)$ -ej, a  $i$  to skumulowany wychód frakcji  $i$ -tej.

Na podstawie wzorów (14) i (15) otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu w całym badanym materiale wynosi

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda(\gamma) d\gamma = & 0,0257\gamma \Big|_0^{0,51} + 0,07258[\gamma \ln \gamma + (1-\gamma) \ln (1-\gamma) - 0,0045\gamma] \Big|_{0,51}^{0,7993} \\ & + 0,1218[\gamma \ln \gamma + (1-\gamma) \ln (1-\gamma) - 0,5533\gamma] \Big|_{0,7993}^{0,99} + 0,4923\gamma \Big|_{0,99}^1 = 7,4\% \end{aligned}$$

Natomiast jeżeli obliczy  $\bar{\lambda}$  się na podstawie wyników doświadczalnych, czyli  $\bar{\lambda} = \sum_i f_i \lambda_i$ , gdzie  $\lambda_i$  oznacza procentową zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji, a  $f_i$  wychód tej frakcji, to otrzymuje się, że  $\bar{\lambda} = 6,2\%$ .

Obliczając na podstawie wzoru (16) średnią zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji w stosunku do całości materiału otrzymuje się wyniki, które przedstawiono w tabeli 5.

TABELA 5

Średnie zawartości popiołu w  $i$ -tej frakcji

TABLE 5

Mean ash contents in  $i$ th fraction

$\rho$ gęstość frakcji	$\lambda_i$ zawartość popiołu we frakcji $\lambda$	Wychód frakcji $f_i$	$\bar{\lambda}_\tau = f_i \lambda_i$ doświadczalne	$\bar{\lambda}_\tau$ teoretyczne
1,3	0,0261	0,6247	0,0163	0,0153
1,4	0,0377	0,2399	0,0090	0,0190
1,5	0,1732	0,0618	0,0107	0,0120
1,6	0,2608	0,0229	0,0060	0,0060
1,7	0,3248	0,0166	0,0053	0,0052
1,8	0,3834	0,0175	0,0067	0,0066
1,9	0,4832	0,0166	0,0080	0,0079

Jeżeli do oceny jakości przybliżenia zastosuje się błąd średniokwadratowy  $s_r$  dla  $\lambda_i$ , to otrzymuje się, że  $s_r = 0,2\%$ .

Porównując wyniki na zawartość średnią popiołu w całym materiale (różnica wynosi 1,2%) oraz badając różnicę między zawartościami popiołu w poszczególnych frakcjach w stosunku do całego materiału, uzyskanymi na podstawie wyników doświadczalnych a wynikami uzyskanymi poprzez aproksymację (błąd  $s_r = 0,2\%$ ) można przyjąć, że krzywa wzbogacalności Henry'ego dobrze opisuje przebieg tego procesu.

### 3.2. Powierzchnia wzbogacalności Henry'ego

Można przyjąć, że materiał węglowy został rozdzielony na  $N$  frakcji ze względu na dwie cechy, a mianowicie gęstość i wielkość ziaren, czyli że

$$X_i = \{(d, \rho); d \in (d_{i-1}, d_i), \rho \in (\rho_{i-1}, \rho_i)\} \quad (17)$$

gdzie:

- $d$  – wielkość ziarna,
- $\rho$  – gęstość ziarna.

Przyjmijmy też, że  $\gamma_i$  oznacza procentowy udział masy frakcji  $X_i$  w badanym materiale.

Dla każdej frakcji oszacowano procentową zawartość popiołu  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Jeżeli rozważać się będzie trójwymiarowy wektor losowy  $(D, P, \Lambda)$ , gdzie  $D$  jest zmienną losową opisującą wielkość ziarna,  $P$  – jego gęstość, a  $\Lambda$  zawartość popiołu, to znając funkcję gęstości rozkładu tego wektora, czyli funkcję  $f(d, \rho, \lambda)$  można wyznaczyć funkcję  $\lambda = \lambda(d, \rho)$ , która jest funkcją regresji pierwszego rodzaju (Tumidajski 1997), czyli

$$\lambda(d, \rho) = E(\Lambda | D = d, P = \rho) = \frac{\int_0^{\lambda_{\max}} \lambda f(d, \rho, \lambda) d\lambda}{f_1(d, \rho)} \quad (18)$$

gdzie  $f_1(d, \rho)$  jest gęstością rozkładu wektora  $(D, P)$ .

Aby wyznaczyć funkcję  $\lambda(d, \rho)$  należy najpierw wyznaczyć funkcję gęstości  $f(d, \rho, \lambda)$  oraz  $f_1(d, \rho)$ .

Jednym ze sposobów aproksymacji tych gęstości jest zastosowanie rozkładów Morgensterna (Kotz i in. 2000; Tumidajski 1997) dla ich dystrybuant, jak poniżej

$$F(d, \rho, \lambda) = F_1(d)F_2(\rho)F_3(\lambda)(1 + \alpha_{12}(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho)) + \alpha_{13}(1 - F_1(d))(1 - F_3(\lambda)) + \alpha_{23}(1 - F_2(\rho))(1 - F_3(\lambda))) \quad (19)$$

oraz

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 + \alpha_{12}(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (20)$$

Wówczas

$$f(d, \rho, \lambda) = \frac{\partial^2 F}{\partial d \partial \rho \partial \lambda}$$

oraz

$$f(d, \rho) = \frac{\partial^2 F}{\partial d \partial \rho}$$

gdzie  $F_1(d)$  oznacza dystrybuantę zmiennej losowej  $D$ ,  $F_2(\rho)$  – dystrybuantę zmiennej losowej  $P$ , a  $F_3(\lambda)$  – dystrybuantę zmiennej losowej  $\Lambda$ , natomiast  $\alpha$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{23}$  spełniają warunki  $|\alpha| \leq 1$ ,  $|\alpha_{ij}| \leq 1$ . W niektórych przypadkach można zastosować aproksymację Farlie-Gumbela-Morgensterna (Kotz i in. 2000), a mianowicie

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)[1 + \alpha \cdot g_1(d)g_2(\rho)] \quad (21)$$

gdzie  $g_1(d)$ ,  $g_2(\rho)$  oznaczają funkcje spełniające warunki  $g_1(d) \in [0,1]$ ,  $g_2(\rho) \in [0,1]$  a  $\alpha$  jest dobranym parametrem z przedziału  $[-1,1]$ .

Dla aproksymacji funkcji  $F(d, \rho)$  można również zastosować rozkład dwuwymiarowy logistyczny (Tumidajski 1997) o postaci

$$F(d, \rho) = [1 + a_1 e^{-b_1 d} + a_2 e^{-b_2 \rho}]^{-1} \quad (22)$$

gdzie  $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$

lub dwuwymiarowy rozkład Gumbela (Tumidajski 1997)

$$F(d, \rho) = 1 - e^{-a_1 d} - e^{-a_2 \rho} + e^{-a_1 d - a_2 \rho - c d \rho} \quad (23)$$

gdzie  $a_1, a_2, c > 0$ .

Ze względu na trudności rachunkowe przy wyznaczaniu funkcji  $F(d, \rho, \lambda)$ , często zamiast regresji pierwszego rodzaju wyznacza się regresję drugiego rodzaju zawartości popiołu od gęstości i wielkości ziarna. Średnia zawartość popiołu w badanym materiale wyraża się wzorem (Tumidajski 1997)

$$\lambda = \iint_D \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d \rho \quad (24)$$

gdzie:

$$D = \{(d, \rho) : d \in [0, d_{\max}], \rho \in [0, \rho_{\max}]\}$$

Najczęściej funkcjami wykorzystywanymi do tego celu są (Dobosz 2001):

— funkcja multiplikatywna

$$f(x, y) = \beta_0 x^{\beta_1} y^{\beta_2}$$

— funkcja wykładnicza

$$f(x, y) = e^{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}$$

— funkcja logistyczna

$$f(x, y) = \frac{b_0}{1 + b_1 e^{-c_1 x} + b_2 e^{-c_2 y}}$$

— funkcja liniowa

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

Funkcję  $f(d, \rho)$  można również wyznaczyć korzystając z metod aproksymacji jądrowej (Scott 1992; Niedoba 2005), a mianowicie

$$f(d, \rho) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{1}{h_1 h_2} k_1 \left( \frac{d - d_i}{h_1} \right) k_2 \left( \frac{\rho - \rho_j}{h_2} \right) n_{ij} \quad (25)$$

gdzie:

$k_1(x)$  i  $k_2(y)$  są jednowymiarowymi funkcjami jądrowymi, spełniającymi warunki

a)  $0 \leq k_1(x) < c_1 < +\infty, 0 \leq k_2(y) < c_2 < +\infty;$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(y) dy = 1;$

c)  $k_1(x) = k_1(-x), k_2(y) = k_2(-y).$

$h_1, h_2$  oznaczają długość pasm,  $N = \sum_{ij} n_{ij}$ ,  $n_{ij}$  oznacza liczebność klasy  $(i, j)$ .

Najczęściej stosowanymi funkcjami jądrowymi są (Niedoba 2005, 2012):

a) funkcja Epanechnikova o postaci

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left( 1 - \frac{1}{5} x^2 \right) & \text{dla } |x| \leq \sqrt{5} \\ 0 & \text{dla } |x| > \sqrt{5} \end{cases} \quad (26)$$

b) funkcja Gaussa o postaci

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} \quad \text{dla } x \in (-\infty, +\infty) \quad (27)$$

Długości pasm  $h_1$  i  $h_2$  są wówczas zadane wzorami

a) dla funkcji Epanechnikova

$$h_1 = 1,056k^{-1/5} s_1, \quad h_2 = 1,056l^{-1/5} s_2 \quad (28)$$

b) dla funkcji Gaussa

$$h_1 = 1,066k^{-1/5} s_1, \quad h_2 = 1,066l^{-1/5} s_2 \quad (29)$$

gdzie  $k$  oznacza liczbę klas dla zmiennej  $D$ , a  $l$  oznacza liczbę frakcji dla zmiennej  $P$ , natomiast  $s_1$  i  $s_2$  oznaczają odchylenia standardowe tych zmiennych.

Jeżeli za funkcję jądrową dla obu zmiennych przyjmie się funkcję Gaussa (25), to funkcja  $f(d, \rho)$  jest zadana wówczas wzorem:

$$f(d, \rho) = \frac{1}{Nh_1h_2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{n_{ij}}{2\pi} e^{-\frac{(d-d_i)^2}{2h_1^2}} e^{-\frac{(\rho-\rho_j)^2}{2h_2^2}} \quad (30)$$

Natomiast średnia zawartość popiołu w całym materiale można obliczyć z poniższej zależności

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2\pi Nh_1h_2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij} \int_0^{d_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} \lambda(d, \rho) e^{-\left(\frac{(d-d_i)^2}{2h_1^2} - \frac{(\rho-\rho_j)^2}{2h_2^2}\right)} d\rho dd \quad (31)$$

Praktyczne zastosowanie wyżej opisanej metody wraz z przykładami będzie przedmiotem dalszych badań w tym zakresie.

### Podsumowanie

1. Otrzymane wyniki aproksymacji dwuwymiarowej pozwalają stwierdzić, że zaprezentowana metodyka może być z powodzeniem stosowana do aproksymacji podstawowych krzywych wzbogacalności Henry'ego, co potwierdza fakt, że średnia zawartość popiołu obliczona na podstawie wyników doświadczalnych nie różni się w znaczący sposób od wartości wyliczonej na podstawie teoretycznej krzywej Henry'ego (różnica o 1,2%). Ponadto różnica między średnimi zawartościami popiołu w poszczególnych frakcjach w stosunku do całego materiału uzyskanymi na podstawie wyników doświadczalnych a wynikami teoretycznymi dla  $\lambda_2(\gamma)$  (krzywej otrzymanej na drodze obliczenia funkcji odwrotnej  $\gamma = \Phi^{-1}(\lambda)$ ) nie jest duża ( $s_r = 0,2\%$ ), co świadczy o prawidłowości stosowanej metody aproksymacyjnej. Można przyjąć, że uzyskana krzywa teoretyczna  $\lambda_2(\gamma)$  jest dobrą aproksymacją krzywej wzbogacalności Henry'ego  $\lambda = \lambda(\gamma)$ .
2. Przedstawienie w postaci analitycznej krzywej Henry'ego pozwala oszacować zawartość badanego składnika (w dowolnej frakcji badanego materiału, tzn. w dowolnym zakresie gęstości). Aproksymacja krzywą  $\lambda_1(\gamma)$  (otrzymaną na drodze kompilacji rozkładów logistycznego i GSA), ze względu na bardziej skomplikowaną postać jest mniej użyteczna praktycznie.
3. Zastosowanie metody krigingu zwyczajnego do wyznaczenia szukanych wartości interesujących parametrów badanego materiału (jak np. gęstość, czy zawartość popiołu)

potwierdza możliwość stosowania tej metody w przypadku braku możliwości uzyskania danych eksperymentalnych.

4. W przypadku dwuwymiarowej aproksymacji zaproponowano sposoby określenia równania teoretycznej powierzchni  $\lambda = \lambda(d, \rho)$ , z tym że w tym przypadku zbadanie dokładności aproksymacji będzie wymagać zastosowania całkowania numerycznego.

Artykuł jest wynikiem realizacji projektu badawczego nr 3390/B/T02/2011/40

#### LITERATURA

- Allen T., 1968 – Particle size measurement. London Chapman and Hall.
- Dobosz M., 2001 – Statystyczna analiza wyników badań. Wyd. Exit, Warszawa.
- Drzymała J., 2009 – Podstawy mineralurgii, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Foszcz D., 2003 – Zastosowanie metod bootstrapowych do bilansowania produkcji na przykładzie O/ZWR KGHM „Polska Miedź” S.A. Inżynieria Mineralna vol. 3, pp. 64–69.
- Gawlik i in. 2004 – Gawlik L., Mirowski T., Mokrzycki E., Olkuski T., Szurlej A., 2004 – Coal preparation versus losses of chemical energy in combustion processes. Gospodarka Surowcami Mineralnymi t. 20, z. 4, s. 81–88.
- Gottfried B.S., 1981 – Statistical representation of generalised distribution data for floatsink coal-cleaning devices: sand cones. Int. J. Min. Processing no 8, pp. 89–91.
- Kotz i in. 2000 – Kotz S., Balakrishnan N., Johnson N.L., 2000 – Continuous multivariate distributions. John Wiley, New York.
- Krawczykowski i in. 2012 – Krawczykowski D., Krawczykowska A., Trybalski K., 2012 – Laser particle size analysis – the influence of density and particle shape on measurement results. Gospodarka Surowcami Mineralnymi t. 28, z. 4, s. 101–112.
- Niedoba T., 2003 – Ocena jakości produktu przy pomocy metod bayesowskich na przykładzie złoża „Rudna”. Inżynieria Mineralna no 3, pp. 134–141.
- Niedoba T., 2007 – Ocena zawartości popiołu w pokładach węgla za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych. Górnictwo i Geoinżynieria vol. 4, pp. 39–50.
- Niedoba T., 2012 – Modern statistical methods in description of raw materials in context of natural environment. Polish Journal of Environmental Studies vol. 21, no 5A, pp. 321–325.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2012 – Application of Ordinary Kriging in Purpose of Determination of Ash Contents in Coal Dependably on Density and Particle Size of Comminuted Material, in Proceedings of XXVI International Mineral Processing Congress. New Delhi, India, pp. 3835–3843.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2012 – Determination of Ash Contents in Coal by Means of Ordinary Kriging Method. Journal of Earth Science and Engineering vol. 2, iss. 10, pp. 571–576.
- Olejnik i in. 2010 – Olejnik T., Surowiak A., Gawenda T., Niedoba T., Tumidajski T., 2010 – Wielowymiarowe charakterystyki węgla jako podstawa do oceny i korekty technologii ich wzbogacania. Górnictwo i Geoinżynieria vol. 4/1, pp. 207–216.
- Róg L., 2009 – Możliwości wykorzystania zespołów krzywych wzbogalności do oceny właściwości fizykochemicznych koncentratów węgla kamiennych. Przegląd Górniczy vol. 65, no 7–8, pp. 96–109.
- Scott D.W., 1992 – Multivariate Density Estimation. John Wiley, New York.
- Stępiński W., 1964 – Wzbogacanie grawitacyjne. PWN, Warszawa.
- Szarapow I.P., 1966 – O statystycznym rozkładzie iłotności rudosoderzaszczich gornych porad. Fizika Ziemi.
- Tumidajski T., 1992 – Wybrane problemy stochastycznej analizy własności materiałów uziarnionych i procesów przeróbki surowców mineralnych. Zeszyty Naukowe AGH, Górnictwo vol. 159, Kraków.



- Tumidajski T., 1997 – Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziałów. Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Tumidajski T., 2012 – Heurystyczne modele procesów rozdrabniania jako podstawa symulacyjnej optymalizacji ich przebieg. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* t. 28, z. 3, s. 127–137.

**ELEMENTY METODOLOGII STOSOWANIA DWU- I WIELOWYMIAROWYCH ROZKŁADÓW WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁÓW UZIARNIONYCH DO OPISU WZBOGACANIA WĘGLI**

**Słowa kluczowe**

Krzywe wzbogacalności Henry’ego, węgiel, aproksymacja, rozkłady zmiennych losowych, wielowymiarowe metody aproksymacji

**Streszczenie**

Procesy wzbogacania są głównym elementem składowym całości procesu przerobczego surowców mineralnych. Efektywność procesu i potencjalną wzbogacalność surowca określa się za pomocą krzywych wzbogacalności. Istnieje wiele rodzajów krzywych wzbogacalności, spośród których jedną z najczęściej stosowanych jest krzywa Henry’ego. W pracy przedstawiono metody jej aproksymacji.

Artykuł został podzielony na dwie części. W części pierwszej przedstawiono aproksymację krzywej wzbogacalności Henry’ego  $\lambda = \lambda(\gamma)$  dla węgla typu 31 (wykorzystano dane z jednej z kopalń Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego) za pomocą dwóch metod. Pierwszy sposób polegał na wyznaczeniu zależności funkcyjnej pomiędzy zawartością popiołu a gęstością  $\lambda = \lambda_0(\rho)$  oraz między wychodem i gęstością  $\gamma = F(\rho)$ . Następnie poprzez określenie funkcji odwrotnej  $\rho = F^{-1}(\gamma)$  i złożenie z pierwszą funkcją uzyskano szukaną zależność dla  $\lambda(\gamma)$ . Druga metoda polegała na aproksymacji funkcji  $\gamma = \Phi(\lambda)$  za pomocą połączenia (sklejenia) dwóch funkcji logistycznych (punkt sklejenia wyznaczono metodą krigingu zwyczajnego). Następnie poprzez funkcję odwrotną otrzymano szukaną funkcję dla  $\lambda(\gamma)$ . Dokładność przybliżenia określono poprzez porównanie zawartości popiołu w poszczególnych frakcjach oraz w całym materiale.

W części drugiej pracy zaproponowano sposoby określenia powierzchni  $\lambda = \lambda(d, \rho)$  za pomocą regresji pierwszego rodzaju z zastosowaniem dwu- i trójwymiarowych rozkładów Morgensterna oraz regresji drugiego rodzaju z zastosowaniem znanych rozkładów dwuwymiarowych lub przy pomocy metod dwuwymiarowej aproksymacji jądrowej, będącej jedną z coraz częściej stosowanych w praktyce nieparametrycznych metod statystycznych. Podano również wzory na średnią zawartość popiołu w całym badanym materiale.

**METHODOLOGICAL ELEMENTS OF APPLYING TWO- AND MULTI-DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS OF GRAINED MATERIALS PROPERTIES TO COAL BENEFICIATION**

**Key words**

Basic Henry’s beneficiation curve, Coal, Approximation, Random variables distribution functions, Multi-dimensional methods of approximation.

**Abstract**

Processes of beneficiation are a primary component of mineral processing operations. The efficiency of the process and potential beneficiation of the material are evaluated by means of beneficiation curves. There are many varieties of beneficiation curves, among which one of the most often applied is a group called Henry’s beneficiation curves. Of these, the basic curve for ash content in feed is the most often used. This paper presents the methods of ash content curve approximation.

This paper is divided into two parts. Part one contains the approximation of the basic Henry's beneficiation curve  $\lambda = \lambda(\gamma)$  for energetic coal of type 31 (data from one of the Upper Silesian coal mines were applied for this purpose) conducted by means of two varying methods. The first method was based on a determination of the functional relation between ash content and density  $\lambda = \lambda_0(\rho)$  as well as between yield and density  $\gamma = F(\rho)$ . Then, by determination of the reverse function  $\rho = F^{-1}(\gamma)$  and its combination with the first function, the searched relation for  $\lambda(\gamma)$  was obtained. The second method was based on approximation of the function  $\gamma = \Phi(\lambda)$  by means of combining two logistical functions (the combining point was determined by means of the ordinary kriging method). Then, using the reverse function, the searched function  $\lambda(\gamma)$  was obtained. The adequacy of approximation was evaluated by comparison of the ash content both in individual fractions and throughout the whole material.

The second part of the paper proposes ways of determining the surface  $\lambda = \lambda(d, \rho)$  by means of regression of the first type by applying two- and three-dimensional Morgenstern distribution functions and by means of regression of the second type by applying known two-dimensional distribution functions or two-dimensional kernel approximation. The latter function is the nonparametric statistical method increasingly used. Furthermore, the paper provides formulas for mean ash content as a component of the whole investigated material.