



TOMASZ NIEDOBA*

Wyznaczenie powierzchni rozdziału materiału uziarnionego za pomocą nieklasycznych metod aproksymacji funkcji rozkładów wielkości i gęstości ziarna

Wstęp

Funkcja rozdziału jest jedną z metod oceny dokładności rozdziału jako procesu. W klasycznych przypadkach stosuje się krzywą rozdziału w układzie współrzędnych (x, y) . Wtedy jednak możliwe jest wzięcie pod uwagę tylko jednej cechy charakterystycznej badanego materiału, którą zazwyczaj jest wielkość ziarna. Tymczasem w wielu procesach przerobczych o rozdziale ziaren decyduje więcej niż jedna ich cecha. Najczęściej rozważanymi własnościami ziaren są ich fizyczne właściwości, czyli wielkość i gęstość ziaren oraz zawartość składnika użytecznego. Dlatego wskazane jest zastosowanie większej ilości wymiarów.

W pracy omówiony zostanie rozdział ziaren w zależności od wielkości i gęstości dla węgla. W tym celu przeprowadzono rozdział materiału w osadzarce miałowej, którym był węgiel pochodzący z jednej z kopalni węgla kamiennego zlokalizowanej na Górnym Śląsku na koncentrat i odpady a następnie przeprowadzono rozdział na klasy ziarnowe i frakcje gęstościowe. Badania nad rozdziałem materiału uziarnionego poddawanego procesowi rozdziału w osadzarce zostały opisane m.in. w (Brożek i Surowiak 2007, 2010; Surowiak i Brożek 2014a; b). Charakterystykę badanego materiału podano w tabelach 1 i 2.

* Dr hab. inż., AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Katedra Inżynierii Środowiska i Przeróbki Surowców, Kraków; e-mail: tniedoba@agh.edu.pl

Tabela 1. Rozdział na klasy ziarnowe i frakcje gęstościowe koncentratu

Table 1. Separation of concentrate on particle size and particle density fractions

Gęstość ρ [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	20–31,5	16–20	14–16	12,5–14	10–12,5	8–10	6,3–8	3,15–6,3	2–3,15
	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]
< 1,3	7 650,0	4 704,0	4 240,0	804,2	2 347,2	2 650,0	1 683	6 544	1 519,4
1,3–1,4	1 260,0	586,2	431,0	66,0	2 703,8	1 847,0	2 744	3 627,6	2 104,0
1,4–1,5	963,8	433,4	313,2	80,6	436,6	425,4	283,2	704,4	277,8
1,5–1,6	203,0	223,0	190,8	34,2	138,4	143,0	129,6	272	86,0
1,6–1,7	134,8	126,8	87,0	21,0	145,0	103,6	102,8	224,4	77,8
1,7–1,8	61,2	48,8	45,0	15,0	45,8	31,8	32	76	27,8
>1,8	58,0	17,2	0	0	52,8	65,0	93,6	267,2	137,8

Tabela 2. Rozdział na klasy ziarnowe i frakcje gęstościowe nadawy

Table 2. Separation of feed on particle size and particle density fractions

Gęstość ρ [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	20–31,5	16–20	14–16	12,5–14	10–12,5	8–10	6,3–8	3,15–6,3	2–3,15
	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]	masa [g]
< 1,3	7 674,6	4 792	4 266,8	851,5	2 468,6	2 836,9	1 831,4	7 365,6	2 297,2
1,3–1,4	1 319,4	640,2	467,2	120,8	2 788,2	1963	3 092,7	4 393,2	2 672,8
1,4–1,5	1 009,6	549,6	356,6	144	509,6	496,4	401,8	1020	496
1,5–1,6	388,8	344,8	216,8	111,2	208	209	214,2	498	219,2
1,6–1,7	440,2	429	125	142,7	285,6	207,2	216	473,6	212,2
1,7–1,8	295	305,4	100,2	267	237,4	182,4	194	344,8	162
>1,8	844	778,2	161,7	510	598,2	529,4	616,6	1176	482,8

1. Zastosowanie klasycznych metod statystycznych do aproksymacji krzywych składu

Oznaczmy przez D zmienną losową opisującą wielkość ziarna, a przez P zmienną opisującą jego gęstość. Na podstawie uzyskanych wyników doświadczalnych przeprowadzono aproksymację dystrybuant zmiennych D i P , zarówno dla nadawy jak i koncentratu. W tym celu zastosowano metody klasyczne, jak i tzw. metody nieklasyczne. Wiele tego typu badań było wykonywanych w szeroko rozumianej przeróbce surowców mineralnych, które zostały opisane m.in. w (Jamróz 2014a, b, c; Jamróz i Niedoba 2014, 2015a, b; Marciniak-Kowalska i in. 2014; Niedoba 2013a, b, 2014, 2015; Niedoba i Jamróz 2013). Za pomocą metod klasycznych najlepszą aproksymację dla zmiennej D – zarówno w nadawie, jak i w koncentracie – uzyskano za pomocą rozkładu Weibulla (RRB), natomiast dla zmiennej losowej P , za pomocą rozkładu logistycznego (Niedoba i Tumidajski 2005; Tumidajski 1997).

Uzyskane tą metodą funkcje zadane są wzorami (1), (2), (3) i (4).

Dystrybuanta zmiennej losowej D dla nadawy

$$F_1(d) = 1 - \exp(-0,0273d^{1,4783}) \quad (1)$$

Dystrybuanta zmiennej P dla nadawy

$$F_2(\rho) = (1 + 1405,29 \exp(-5,8833\rho))^{-1} \quad (2)$$

Dystrybuanta zmiennej D dla koncentratu

$$F_3(d) = 1 - \exp(-0,0215d^{1,532}) \quad (3)$$

Dystrybuanta zmiennej P dla koncentratu

$$F_4(\rho) = (1 + 946,37 \exp(-6,3241\rho))^{-1} \quad (4)$$

Do oceny dokładności przybliżenia posłużono się błędem średnio-kwadratowym, znanym też jako odchylenie resztowe. Zadane jest ono wzorem (5)

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (F(x) - \Phi(x))^2}{n-2}} \quad (5)$$

- ↗ n – liczba frakcji,
 $F(x)$ – dystrybuanta teoretyczna,
 $\Phi(x)$ – wartości dystrybuanty doświadczalnej.

Wielkości błędów przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Wartości błędów średniokwadratowych dla poszczególnych aproksymant rozkładem Weibulla

Table 3. Values of mean standard errors for individual approximations by Weibull distribution function

	$F_1(d)$	$F_2(\rho)$	$F_3(d)$	$F_4(\rho)$
s_r	5,08	4,70	5,48	4,38

Wielkości błędów, mimo że są dopuszczalne, skłaniają do szukania dokładniejszej aproksymacji dystrybuant rozważanych zmiennych losowych.

3. Zastosowanie nieklasycznych metod statystycznych do aproksymacji krzywych składu

W celu aproksymacji krzywych rozdziału posłużono się także metodami nieklasycznymi wyznaczenia gęstości rozkładu badanych zmiennych, a mianowicie metodami jądrowymi (Domański i Pruska 2000; Efromovich 1999; Kotz i in. 2000; Niedoba i Tumidajski 2005, 2006; Niedoba 2009).

Szukaną funkcję gęstości rozkładu przedstawiono w postaci:

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (6)$$

- ↗ $K(x)$ – funkcja jądra, spełniająca warunki $k(x) \geq 0$ oraz $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$,

- n – liczba pomiarów,
 h – długość pasma,
 x_1, \dots, x_n – wyniki pomiarowe.

W pracy wykorzystano funkcję jądrową Gaussa o postaci zadanej wzorem

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (7)$$

Dla funkcji tej optymalną długością pasma jest (Efromovich 1999; Niedoba i Tumidajski 2005):

$$h_{opt} = 1,066n^{-1/5}\sigma \quad (8)$$

↪ σ oznacza odchylenie standardowe.

Przy zastosowaniu metody jądrowej dla zmiennej D w nadawie otrzymano $h_{opt} = 3,29$, $\sigma = 7,77$ oraz dystrybuantę zmiennej D w postaci

$$\begin{aligned} F_1^*(d) = & 9,4\Phi\left(\frac{d-2,575}{3,29}\right) + 21,97\Phi\left(\frac{d-4,725}{3,29}\right) + 9,45\Phi\left(\frac{d-7,15}{3,29}\right) + \\ & + 9,24\Phi\left(\frac{d-9,0}{3,29}\right) + 10,21\Phi\left(\frac{d-11,25}{3,29}\right) + 3,28\Phi\left(\frac{d-13,25}{3,29}\right) + \\ & + 7,97\Phi\left(\frac{d-15,0}{3,29}\right) + 11,28\Phi\left(\frac{d-18,0}{3,29}\right) + 17,2\Phi\left(\frac{d-25,75}{3,29}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Dla zmiennej P w nadawie otrzymano $h = 0,07$, $\sigma = 0,1669$ oraz dystrybuantę

$$\begin{aligned} F_2^*(\rho) = & 49,43\Phi\left(\frac{\rho-1,25}{0,07}\right) + 25,10\Phi\left(\frac{\rho-1,35}{0,07}\right) + 9,45\Phi\left(\frac{\rho-1,45}{0,07}\right) + \\ & + 9,24\Phi\left(\frac{\rho-1,55}{0,07}\right) + 10,21\Phi\left(\frac{\rho-1,65}{0,07}\right) + 2,99\Phi\left(\frac{\rho-1,75}{0,07}\right) + 7,97\Phi\left(\frac{\rho-1,90}{0,07}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Dla zmiennej D w koncentracji otrzymano odpowiednio: $h = 3,32$, $\sigma = 7,83$.

$$\begin{aligned} F_3^*(d) = & 7,71\Phi\left(\frac{d-2,575}{3,32}\right) + 21,32\Phi\left(\frac{d-4,725}{3,32}\right) + 9,23\Phi\left(\frac{d-7,15}{3,32}\right) + \\ & + 9,58\Phi\left(\frac{d-9,0}{3,32}\right) + 10,67\Phi\left(\frac{d-11,25}{3,32}\right) + 1,85\Phi\left(\frac{d-13,25}{3,32}\right) + \\ & + 9,66\Phi\left(\frac{d-15,0}{3,32}\right) + 11,18\Phi\left(\frac{d-18,0}{3,32}\right) + 18,8\Phi\left(\frac{d-25,75}{3,32}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Dla zmiennej losowej P w koncentracji otrzymano $h = 0,045$, $\sigma = 0,105$

$$F_4^*(\rho) = 58,49\Phi\left(\frac{\rho-1,25}{0,045}\right) + 27,96\Phi\left(\frac{\rho-1,35}{0,045}\right) + 7,13\Phi\left(\frac{\rho-1,45}{0,045}\right) + \quad (12)$$

$$+ 2,60\Phi\left(\frac{\rho-1,55}{0,045}\right) + 1,86\Phi\left(\frac{\rho-1,65}{0,045}\right) + 0,69\Phi\left(\frac{\rho-1,75}{0,045}\right) + 1,27\Phi\left(\frac{\rho-1,90}{0,045}\right)$$

☞ $\Phi(t)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Błędy przybliżeń otrzymanych za pomocą metody jądrowej przedstawia tabela 4.

Tabela 4. Wartości błędów dla poszczególnych aproksymant jądrowych

Table 4. Values of errors for individual kernel approximations

	$F_1^*(d)$	$F_2^*(\rho)$	$F_3^*(d)$	$F_4^*(\rho)$
s_r	2,74	3,67	2,43	2,25

Porównując aproksymacje otrzymane metodą klasyczną i nieklasyczną można zauważyć, że aproksymacja jądrowa dała dużo lepsze efekty, zarówno dla zmiennych rozpatrywanych w nadawie, jak i w koncentracji.

Wyniki wszystkich aproksymacji zamieszczono w tabelach 5–8 oraz na przykładowym wykresie (rys. 1).

Tabela 5. Rozkład zmiennej D w nadawie

Table 5. Distribution of variable D in feed

Wielkość ziarna d [mm]	Wychód klasy [%]	Dystrybuanta doświadczalna $\Phi_1(d)$ [%]	Dystrybuanta teoretyczna $F_1(d)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_1^*(d)$ [%]
2–3,15	9,4	9,4	10,46	13,58
3,15–6,3	21,97	31,37	23,75	29,26
6,3–8	9,45	40,82	39,35	38,58
8–10	9,24	50,06	50,48	46,90
10–12,5	10,21	60,27	62,37	58,30
12,5–14	3,08	63,35	70,19	63,63
14–16	8,17	71,52	77,58	69,94
16–20	11,28	82,80	80,78	79,84
20–31,5	17,20	100	96,40	99,30

Tabela 6. Rozkład zmiennej P w nadawieTable 6. Distribution of variable P in feed

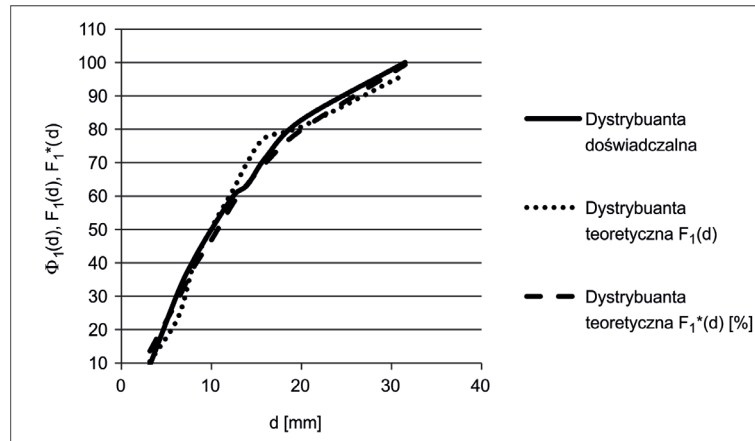
Gęstość ρ [g/cm ³]	Wychód klasy [%]	Dystrybuanta doświadczalna $\Phi_2(\rho)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_2(\rho)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_2^*(\rho)$
1,2–1,3	49,43	49,43	52,69	43,58
1,3–1,4	25,10	74,53	66,70	68,96
1,4–1,5	7,17	81,70	78,29	80,45
1,5–1,6	3,48	85,18	86,65	84,85
1,6–1,7	3,65	88,83	92,12	88,62
1,7–1,8	2,99	91,82	95,40	91,68
1,8–2,0	8,18	100	98,07	99,35

Tabela 7. Rozkład zmiennej D w koncentracieTable 7. Distribution of variable D in concentrate

Wielkość ziarna d [mm]	Wychód klasy [%]	Dystrybuanta doświadczalna $\Phi_3(d)$ [%]	Dystrybuanta teoretyczna $F_3(d)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_3^*(d)$ [%]
2–3,15	7,71	7,71	8,91	10,47
3,15–6,3	21,32	29,03	21,29	27,67
6,3–8	9,23	38,26	36,58	36,34
8–10	9,58	47,84	47,84	45,94
10–12,5	10,67	58,51	60,15	56,12
12,5–14	1,85	60,36	69,46	61,52
14–16	9,66	70,02	76,25	68,01
16–20	11,18	81,20	85,10	77,61
20–31,5	18,80	100	96,41	99,21

Tabela 8. Rozkład zmiennej P w koncentracieTable 8. Distribution of variable P in concentrate

Gęstość ρ [g/cm ³]	Wychód klasy [%]	Dystrybuanta doświadczalna $\Phi_4(\rho)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_4(\rho)$	Dystrybuanta teoretyczna $F_4^*(\rho)$
1,2–1,3	58,49	58,49	67,61	54,41
1,3–1,4	27,96	86,45	84,36	83,55
1,4–1,5	7,13	93,58	91,03	92,98
1,5–1,6	2,60	96,18	95,03	96,08
1,6–1,7	1,86	98,04	97,29	97,89
1,7–1,8	0,69	98,73	98,54	98,65
1,8–2,0	1,27	100	99,43	99,98

Rys. 1. Porównanie dystrybuant dla zmiennej losowej D w nadawieFig. 1. Comparison of distribution functions for random variable D in feed

Wykorzystując dystrybuanty rozkładu otrzymane metodą jądrową, które dały dokładniejszą aproksymację dokonano aproksymacji rozkładu dwuwymiarowego wektora (D, P) w nadawie i koncentracie. Rozkład teoretyczny uzyskano korzystając z rozkładu Morgensterna o postaci (Kotz i in. 2000; Niedoba 2009; Tumidajski 1997; Tumidajski i Niedoba 2008):

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 + \mu(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (13)$$

↪ parametr $\mu \in [-1, 1]$.

Jeżeli do wzoru Morgensterna (13) wstawimy w miejsce $F_1(d)$ i $F_2(\rho)$ dystrybuanty $F_1^*(d)$, $F_2^*(\rho)$, $F_3^*(d)$ oraz $F_4^*(\rho)$ otrzymane metodą jądrową i zadane wzorami, odpowiednio (9), (10), (11) i (12), oraz ustalając optymalną wartość μ za pomocą metody najmniejszych kwadratów otrzymujemy:

Dla wektora (D, P) w nadawie:

$$F_1^*(d) = F_1^*(d)F_2^*(\rho)(1 + 0,4923(1 - F_1^*(d))(1 - F_2^*(\rho))) \quad (14)$$

Dla wektora (D, P) w koncentracie:

$$F_2^*(d) = F_3^*(d)F_4^*(\rho)(1 + 0,059(1 - F_3^*(d))(1 - F_4^*(\rho))) \quad (15)$$

Wartości dystrybuant doświadczalnych wektora (D, P) oraz ich teoretycznych aproksymacji zostały zamieszczone w tabelach 9–12.

Tabela 9. Dystrybuanta empiryczna wektora (D, P) w nadawie [%]Table 9. Empirical distribution function of vector (D, P) in feed [%]

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	2–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20	20–31,5
1,2–1,3	3,30	13,89	16,52	20,06	24,16	25,38	31,51	38,40	49,43
1,3–1,4	7,14	24,05	31,13	38,03	45,60	46,99	53,79	61,60	74,53
1,4–1,5	7,85	26,23	33,89	41,51	48,81	51,41	58,72	67,32	81,70
1,5–1,6	8,17	27,27	35,24	43,16	51,76	53,52	61,14	70,24	85,18
1,6–1,7	8,48	28,26	36,24	44,76	53,77	55,74	63,54	73,26	88,83
1,7–1,8	8,71	28,99	37,55	46,03	55,37	57,72	65,66	75,82	91,82
1,8–2,0	9,40	31,37	40,82	51,06	60,27	63,35	71,52	82,80	100

Tabela 10. Dystrybuanta teoretyczna $F_1^*(d, \rho)$ wektora (D, P) w nadawie [%]Table 10. Theoretical distribution function $F_1^*(d, \rho)$ of vector (D, P) in feed [%]

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	2–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20	20–31,5
1,2–1,3	7,33	15,25	19,68	23,45	28,34	30,53	33,02	36,74	43,26
1,3–1,4	10,60	22,36	31,67	34,97	42,77	46,32	50,47	56,75	68,55
1,4–1,5	11,83	25,14	32,87	39,56	48,78	52,98	57,89	65,48	79,94
1,5–1,6	11,20	26,01	34,23	41,37	51,01	55,45	60,67	68,76	84,31
1,6–1,7	12,62	26,96	25,27	42,80	52,87	57,53	63,02	71,55	88,03
1,7–1,8	12,89	27,88	26,26	43,93	54,36	59,20	64,91	73,80	91,06
1,8–2,0	13,53	29,11	38,40	46,67	58,00	63,29	69,55	79,37	98,66

Tabela 11. Dystrybuanta empiryczna wektora (D, P) w koncentracie [%]Table 11. Empirical distribution of vector (D, P) in concentrate [%]

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	2–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20	20–31,5
1,2–1,3	2,77	14,68	17,24	22,56	26,83	28,29	36,01	44,57	58,49
1,3–1,4	6,60	25,11	33,16	41,34	50,53	52,11	60,61	70,24	86,45
1,4–1,5	7,11	26,90	35,47	44,24	54,48	56,13	65,20	75,62	93,58
1,5–1,6	7,27	27,56	36,37	45,58	55,81	57,60	67,02	77,85	96,18
1,6–1,7	7,41	28,10	37,10	46,50	56,99	58,82	68,40	79,45	98,06
1,7–1,8	7,46	28,29	37,35	46,81	57,35	59,23	68,89	80,02	98,73
1,8–2,0	7,71	29,03	38,26	47,84	58,51	60,36	70,02	81,20	100

Tabela 12. Dystrybuanta teoretyczna $F_2^*(d, \rho)$ wektora (D, P) w koncentracji [%]Table 12. Theoretical distribution $F_2^*(d, \rho)$ of vector (D, P) in concentrate [%]

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	2–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20	20–31,5
1,2–1,3	5,83	15,35	20,11	25,36	30,89	33,82	37,32	42,48	53,99
1,3–1,4	8,96	23,28	30,55	38,58	47,09	51,59	57,00	64,98	82,90
1,4–1,5	9,77	25,80	33,88	42,81	52,28	57,29	63,32	72,23	92,25
1,5–1,6	10,08	26,62	34,97	44,19	53,97	59,16	65,39	74,01	95,32
1,6–1,7	10,26	27,11	35,60	45,00	54,96	60,24	66,59	75,99	97,11
1,7–1,8	10,33	27,31	35,87	45,34	55,38	60,71	67,11	76,58	97,87
1,8–2,0	10,46	27,66	36,33	45,93	56,11	61,51	68,00	77,59	99,19

Błędy przybliżeń dystrybuant empirycznych dystrybuantami teoretycznymi w tym przypadku wynoszą, odpowiednio $s_r = 2,60$ dla nadawy oraz $s_r = 2,45$ dla koncentratu. Można więc wywnioskować, że aproksymacje metodą jądrową również w przypadku dwuwymiarowym przynoszą wystarczająco dokładne wyniki.

4. Powierzchnia rozdziału

Na podstawie otrzymanych wyników aproksymacyjnych można określić powierzchnię rozdziału materiału, czyli węgla, uwzględniając wielkość i gęstość ziarna (Drzymala 2001; Tumidajski 1997). Powierzchnia rozdziału opisana jest wzorem

$$\tau(d, \rho) = \gamma_k \frac{f_k(d, \rho)}{f_n(d, \rho)} \quad (16)$$

- ↳ $f_k(d, \rho)$ – funkcja gęstości rozkładu wektora (D, P) w koncentracji,
- $f_n(d, \rho)$ – funkcja gęstości rozkładu (D, P) w nadawie,
- γ_k – wychód koncentratu.

Funkcja gęstości rozkładu Morgensterna jest zadana wzorem (Kotz i in. 2000; Tumidajski 1997):

$$f(d, \rho) = f_1(d) f_2(\rho) (1 + \mu(1 - 2F_1(d))(1 - 2F_2(\rho))) \quad (17)$$

Wykorzystując wyniki uzyskane za pomocą aproksymacji jądrowej rozkładu wektora (D, P) otrzymujemy

$$f_k(d, \rho) = f_3^*(d) f_4^*(\rho) \left(1 + 0.059 \left(1 - 2F_3^*(d)\right) \left(1 - 2F_4^*(\rho)\right)\right) \quad (18)$$

gdzie:

$$f_3^*(d) = \left(F_3^*(d)\right)' = \frac{1}{100h\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^9 n_{i3} \exp\left(-\frac{(d-d_i)^2}{2h^2}\right) = 0,012 \sum_{i=1}^9 n_{i3} \exp\left(-\frac{(d-d_i)^2}{22,04}\right) \quad (19)$$

gdzie n_{i3} oznacza wychód i -tej klasy ziarnowej w koncentracji, a d_i środek tej klasy, natomiast

$$f_4^*(\rho) = \left(F_4^*(\rho)\right)' = \frac{1}{100h\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^7 n_{i4} \exp\left(-\frac{(\rho-\rho_i)^2}{2h^2}\right) = 0,089 \sum_{i=1}^7 n_{i4} \exp\left(-\frac{(\rho-\rho_i)^2}{0,004}\right) \quad (20)$$

- ↗ n_{i4} – wychód i -tej frakcji gęstościowej w koncentracji,
- ↗ ρ_i – środek tej frakcji,
- ↗ $F_3^*(d)$ oraz $F_4^*(\rho)$ – dystrybuanty zmiennych D i P w koncentracji, otrzymane metodą jądrową i zadane są one wzorami, odpowiednio (11) i (12).

Analogicznie dla nadawy otrzymujemy

$$f_n(d, \rho) = f_1^*(d) f_2^*(\rho) \left(1 + 0.4923 \left(1 - 2F_1^*(d)\right) \left(1 - 2F_2^*(\rho)\right)\right) \quad (21)$$

gdzie

$$f_1^*(d) = \left(F_1^*(d)\right)' = \frac{1}{100h\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^9 n_{i1} \exp\left(-\frac{(d-d_i)^2}{2h^2}\right) = 0,012 \sum_{i=1}^9 n_{i1} \exp\left(-\frac{(d-d_i)^2}{21,65}\right) \quad (22)$$

oraz

$$f_2^*(\rho) = (F_2^*(\rho))' = \quad (23)$$

$$= \frac{1}{100h\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^7 n_{i2} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_i)^2}{2h^2}\right) = 0,057 \sum_{i=1}^7 n_{i2} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_i)^2}{0,0098}\right)$$

↪ $F_1^*(d)$ oraz $F_2^*(\rho)$ – dystrybuanty zmiennych D i P w nadawie, otrzymane za pomocą metody jądrowej, a zadane wzorami, odpowiednio (9) i (10),

n_{i1} – wychód i -tej klasy ziarnowej w nadawie,

n_{i2} – wychód i -tej frakcji gęstościowej w nadawie.

Wstawiając (17) i (19) oraz wychód koncentratu $\gamma_k = 0,733$ do wzoru na powierzchnię rozdziału (16) otrzymujemy jej równanie

$$\tau(d, \rho) = \frac{0,733 f_3^*(d) f_4^*(\rho) (1 + 0,059 (1 - 2F_3^*(d)) (1 - 2F_4^*(\rho)))}{f_1^*(d) f_2^*(\rho) (1 + 0,4923 (1 - 2F_1^*(d)) (1 - 2F_2^*(\rho)))} \quad (24)$$

Wyniki aproksymacji funkcji gęstości $f_k(d, \rho)$ oraz $f_n(d, \rho)$ przedstawiono w tabelach 13 i 14, natomiast wartości liczbowe powierzchni rozdziału zamieszczono w tabeli 15. Wykres powierzchni przedstawiono na rysunku 2.

Tabela 13. Funkcja gęstości $f_k(d, \rho)$ rozkładu wektora (D, P) w koncentracie [%]

Table 13. Statistical density function $f_k(d, \rho)$ of vector (D, P) distribution in concentrate [%]

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	3,15	6,3	8	10	12,5	14	16	20	31,5
1,3	26,64	21,24	20,52	18,31	15,52	14,21	12,57	8,57	2,07
1,4	6,71	8,67	8,42	7,57	6,46	5,94	5,27	3,62	0,89
1,5	1,91	2,47	2,41	2,17	1,86	1,71	1,52	1,04	0,26
1,6	0,85	1,10	1,10	0,97	0,83	0,76	0,68	0,47	0,12
1,7	0,48	0,62	0,62	0,54	0,46	0,43	0,38	0,26	0,06
1,8	0,17	0,22	0,22	0,19	0,15	0,15	0,13	0,09	0,02
2,0	0,04	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02	0,004

Tabela 14. Funkcja gęstości $f_n(d, \rho)$ rozkładu wektora (D, P) w nadawie [%]Table 14. Statistical density function $f_n(d, \rho)$ of vector (D, P) distribution in feed [%]

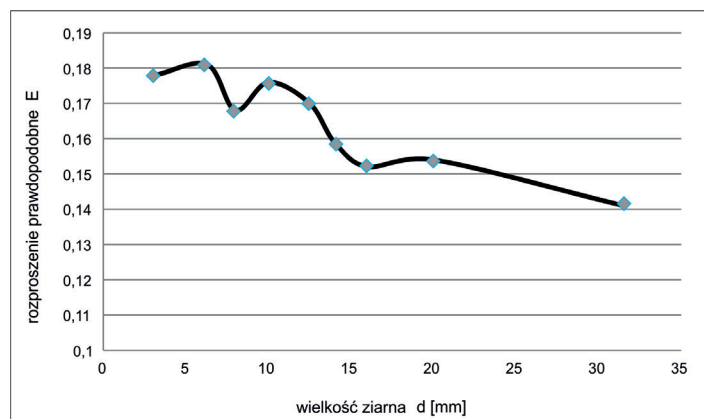
Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	3,15	6,3	8	10	12,5	14	16	20	31,5
1,3	21,52	18,31	17,08	14,81	12,31	10,97	9,60	6,36	1,46
1,4	6,43	8,49	8,31	7,52	6,62	5,95	5,44	3,79	0,90
1,5	2,16	3,15	3,00	2,77	2,56	2,31	2,10	1,49	0,37
1,6	1,25	1,81	1,80	1,67	1,53	1,41	1,30	0,92	0,29
1,7	0,98	1,41	1,46	1,35	1,24	1,16	1,06	0,76	0,19
1,8	0,97	1,42	1,47	1,38	1,28	1,19	1,09	0,79	0,20
2,0	0,47	0,72	0,75	0,72	0,68	0,64	0,59	0,43	0,16

Tabela 15. Powierzchnia rozdziału $\tau(d, \rho)$ Table 15. Partition surface $\tau(d, \rho)$

Gęstość [g/cm ³]	Wielkość ziarna d [mm]								
	3,15	6,3	8	10	12,5	14	16	20	31,5
1,3	89,50	84,91	86,86	89,39	91,15	93,65	94,66	97,42	99,53
1,4	74,45	73,83	73,25	72,78	70,55	72,15	70,04	69,06	71,50
1,5	63,93	56,49	58,08	56,64	52,53	53,52	52,33	50,46	50,80
1,6	49,16	43,94	42,98	41,49	39,22	38,97	37,82	26,94	29,92
1,7	35,41	31,79	29,71	28,92	26,82	26,80	25,92	24,73	22,83
1,8	12,67	11,20	10,33	9,95	9,60	9,11	8,62	8,23	7,23
2,0	8,51	5,02	4,82	4,01	4,25	3,38	3,67	3,36	2,89

Na otrzymanym wykresie powierzchni można zaobserwować, że charakter zależności w tym przypadku jest liniowy i w zasadzie można byłoby go przybliżyć równaniem płaszczyzny. Należałoby sprawdzić podobne przypadki dla materiałów otrzymanych z innych procesów przerobczych. Ogólnie jednak można powiedzieć, że jeżeli ustalimy wielkość ziarna $d = d_k$, to biorąc przekrój powierzchni $\tau(d, \rho)$ płaszczyzną $d = d_k$ otrzymamy krzywe rozdziału w poszczególnych klasach ziaren.

Wskaźnikiem dokładności, który można wyznaczyć z krzywej rozdziału jest rozproszenie prawdopodobne E , zdefiniowane jako:

Rys. 2. Powierzchnia rozdziału $\tau(d, \rho)$ Fig. 2. Partition surface $\tau(d, \rho)$

$$E = \frac{\rho(\tau(\rho|d_k) = 25) - \rho(\tau(\rho|d_k) = 75)}{2} \quad (25)$$

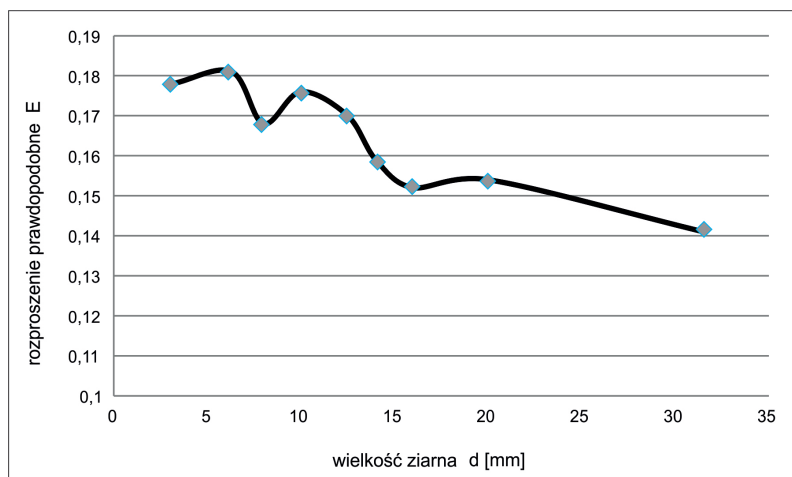
↪ $\rho(\tau(\rho|d_k) = 25)$ i $\rho(\tau(\rho|d_k) = 75)$ są wartościami obliczonymi z równań $\tau(\rho, d_k) = 0,75$ oraz $\tau(\rho, d_k) = 0,25$.

Obliczone wartości przedstawiono w tabeli 16.

Tabela 16. Wartość rozproszenia prawdopodobnego E Table 16. Value of probable error E

Wielkość ziarna d	$\tau_{75}(\rho d_k)$	$\tau_{25}(\rho d_k)$	Rozproszenie prawdopodobne E
3,15	1,389	1,745	0,178
6,3	1,389	1,750	0,181
8,0	1,387	1,724	0,168
10,0	1,387	1,739	0,176
12,5	1,378	1,718	0,170
14,0	1,392	1,710	0,159
16,0	1,380	1,684	0,152
20,0	1,379	1,698	0,154
31,5	1,388	1,669	0,141

Na podstawie obliczonych wartości można utworzyć krzywą zależności rozproszenia prawdopodobnego od wielkości ziarna, przedstawioną na rysunku 3.

Rys. 3. Krzywa rozproszenia prawdopodobnego $E(d)$ Fig. 3. Curve of probable error $E(d)$

Z zależności tej wynika, że bardziej dokładny rozdział nastąpił w klasach o większych wielkościach ziarna ($d = 14, 16, 20, 31,5$ mm), mniej dokładny natomiast w klasach ziaren drobnych ($d = 3,15; 6,3$ mm).

Wnioski

Dzięki zastosowaniu nieklasycznych metod statystycznych w pracy przedstawiono analityczne postacie dystrybuant rozkładów warunkowych i za ich pomocą określono funkcje gęstości rozkładu wektora (D, P) w nadawie oraz koncentracie. Pozwoliło to przedstawić analitycznie dwuczynnikową powierzchnię rozdziału. Tego rodzaju operacje dają szansę na bardziej wnikliwą analizę operacji rozdziału materiału uziarnionego, a tym samym na lepsze sterowanie procesem. Dalsze badania w tym temacie są w toku.

Artykuł został opracowany w ramach projektu pracy statutowej nr 11.11.100.276

LITERATURA

- Brożek, M. i Surowiak, A. 2010. Argument of Separation at Upgrading in the Jig. *Archives of Mining Sciences* vol. 55, pp. 21–40.
- Brożek, M. i Surowiak, A. 2007. Effect of Particle Shape on Jig Separation Efficiency. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol. 41, pp. 397–413.
- Domański, C. i Pruska, K. 2000. *Nieklasyczne metody statystyczne*. PWE. Warszawa.
- Drzymała, J. 2001. *Podstawy mineralurgii*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Efromovich, S. 1999. *Nonparametric Curve Estimation*. New York, Springer-Verlag.

- Jamróz, D. i Niedoba, T. 2014. Application of Observational Tunnels Method to Select Set of Features Sufficient to Identify a Type of Coal. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol 50(1), pp. 185–202.
- Jamróz, D. 2014a. Application of Multidimensional Data Visualization in Creation of Pattern Recognition Systems. [W:] Gruca A. i in. red. *Man-Machine, Interactions 3*, AISC, Heidelberg, Springer-Verlag vol. 242, pp. 443–450.
- Jamróz, D. 2014b. Application of multidimensional scaling to classification of various types of coal, *Archives of Mining Sciences* vol. 59(4), pp. 413–425.
- Jamróz, D. 2014c. Application of multi-parameter data visualization by means of autoassociative neural networks to evaluate classification possibilities of various coal types, *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol. 50(2), pp. 719–734.
- Jamróz, D. i Niedoba, T. 2015a. Application of multidimensional data visualization by means of self-organizing Kohonen maps to evaluate classification possibilities of various coal types, *Archives of Mining Sciences* vol. 60(1), pp. 39–50.
- Jamróz, D. i Niedoba, T. 2015b. Comparison of selected methods of multi-parameter data visualization used for classification of coals, *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol. 51(2), pp. 769–784
- Kotz i in. 2000 – Kotz S., Balakrishnan, N. i Johnson, N. 2000. *Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley & Sons, New York.
- Marciniak-Kowalska i in. 2014 – Marciniak-Kowalska, J., Niedoba, T., Surowiak, A. i Tumidajski, T. 2014. Multi-criteria evaluation of coal properties in terms of gasification, *Archives of Mining Sciences* vol. 59(3), pp. 677–690.
- Niedoba, T. i Jamróz, D. 2013. Visualization of multidimensional data in purpose of qualitative classification of various types of coal. *Archives of Mining Sciences* vol. 58(4), pp. 1317–1331.
- Niedoba, T. i Tumidajski, T. 2005. Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą różnych metod statystycznych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej: Górnictwo* vol. 266, pp. 125–138.
- Niedoba, T. i Tumidajski, T. 2006. The Approximation of Grain Composition Curves by Non-parametric Statistical Methods, [W:] Ónal G. i in. red.: *Proceedings of XXIII International Mineral Processing Congress*, Istanbul, vol. I, pp. 203–208.
- Niedoba, T. 2009. Wielowymiarowe rozkłady charakterystyk materiałów uziarnionych przy zastosowaniu nieparametrycznej aproksymacji funkcji gęstości rozkładów brzegowych. *Górnictwo i Geoinżynieria*, vol. 4, pp. 235–244.
- Niedoba, T. 2013a. Statistical analysis of the relationship between particle size and particle density of raw coal. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol. 49, pp. 175–188.
- Niedoba, T. 2013b. *Wielowymiarowe charakterystyki zmiennych losowych w opisie materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału*. Wydawnictwo IGSMiE PAN.
- Niedoba, T. 2014. Multi-parameter data visualization by means of principal component analysis (PCA) in qualitative evaluation of various coal types, *Physicochemical Problems of Mineral Processing* vol. 50(2), pp. 575–589.
- Niedoba, T. 2015. Application of Relevance Maps in Multidimensional Classification of Coal Types, *Archives of Mining Sciences* vol. 60(1), pp. 93–106.
- Surowiak A. i Brożek M. 2014a. Methodology of Calculation the Terminal Settling Velocity Distribution of Spherical Particles for High Values of the Reynold's Number, *Archives of Mining Sciences*, vol. 59(1), pp. 269–283.
- Surowiak, A. i Brożek, M. 2014b. Methodology of calculation the terminal settling velocity distribution of irregular particles for values of the Reynold's number, *Archives of Mining Sciences* vol. 59(2), pp. 553–562.
- Tumidajski, T. i Niedoba, T. 2008. *Multidimensional Analysis of Coal Separation Process*. [W:] Dianzuo W. i in. red. *Proceedings of XXIV International Mineral Processing Congress*, Beijing, pp. 2357–2364.
- Tumidajski, T. 1997. *Stochastyczna analiza materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału*, Wydawnictwa AGH.

WYZNACZENIE POWIERZCHNI ROZDZIAŁU MATERIAŁU UZIARNIONEGO
ZA POMOCĄ NIEKLASYCZNYCH METOD APROKSYMACJI
FUNKCJI ROZKŁADÓW WIELKOŚCI I GĘSTOŚCI ZIARNA

Słowa kluczowe

powierzchnia rozdziału, nieklasyczne metody statystyczne, metody jądrowe, węgiel, osadzarka

Streszczenie

W pracy poddano analizie materiał uziarniony, którym był węgiel kamienny pobrany z jednej z kopalń Górnego Śląska. Węgiel został pobrany z osadzarki miałowej, gdzie został rozdzielony na koncentrat i odpad. Poddano go przesiewaniu, a następnie rozdziałowi w cieczach ciężkich. Zarówno skład ziarnowy, jak i gęstościowy nadawy oraz koncentratu został zaproksymowany kilkoma klasycznymi rozkładami statystycznymi. Najlepsze rezultaty otrzymano przy zastosowaniu rozkładu Weibulla (RRB). Jednakże – ze względu na niezadowalającą jakość aproksymacji – zdecydowano się na zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych, które stają się coraz częściej stosowanymi alternatywami w badaniach statystycznych. W pracy zastosowano nieparametryczne metody jądrowe, a jako funkcję jądrową przyjęto jądro Gaussa. Metoda jądrowa, stosunkowo nowa, dała znacznie lepsze wyniki aproksymacji niż klasyczne rozkłady statystyczne przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów. Zarówno klasyczne, jak i nieparametryczne otrzymane aproksymanty zostały ocenione za pomocą średniego błędu kwadratowego, którego wartości świadczą o tym, że dostatecznie dobrze przybliżają one wartości otrzymane empirycznie. Tak określone postacie funkcji posłużyły następnie do wyznaczenia dystrybuanty teoretycznej dla wektora (D, P) , gdzie D – oznacza zmienną losową opisującą wielkość ziarna, a P – jego gęstość. Również i ta aproksymacja w sposób zadowalający oddała rzeczywistość. Dlatego posłużyła ona do wyznaczenia równania powierzchni rozdziału, zależnej od obu zmiennych, wielkości i gęstości ziarna, opisujących badany materiał. Otrzymana powierzchnia świadczy o tym, że możliwa jest ocena procesu rozdziału, jaki zachodzi podczas operacji przerobczych za pomocą więcej niż jednej cechy badanego materiału, a ponadto jej jakość potwierdza, że słusznym był wybór nieparametrycznych metod statystycznych jako alternatywy dla powszechnie stosowanych metod aproksymacyjnych.

**DETERMINATION OF PARTITION SURFACE OF GRAINED MATERIAL BY MEANS
OF NON-CLASSICAL APPROXIMATION METHODS
OF DISTRIBUTIONS FUNCTIONS OF PARTICLE SIZE AND DENSITY**

Keywords

partition surface, non-classical statistical methods, kernel methods, coal, jig

Abstract

In this paper, the grained material analyzed was hard coal collected from one of the mines located in Upper Silesia. Material was collected from a dust jig where it was separated in industrial conditions by concentrate and waste. It was then screened in sieves and it was separated in dense media into density fractions. Both particle size distribution and particle density distribution for feed and concentrate were approximated by several classical distribution functions. The best results were obtained by means of the Weibull (RRB) distribution function. However, because of the unsatisfying quality of approximations it was decided to apply non-parametric statistical methods, which became more and more popular alternative methods in conducting statistical investigations. In the paper, the kernel methods were applied to this purpose and the Gauss kernel was accepted as the kernel function. Kernel method, which is relatively new, gave much better results than classical distribution functions by means of the least squared method. Both classical and non-parametric obtained distribution functions were evaluated by means of mean standard error, the values of which proved that they sufficiently well approximate the empirical data. Such function forms were then applied to determine the theoretical distribution function for vector (D, P) , where D is the random variable describing particle size and P – its density. This approximation was sufficiently acceptable. That is why it served to determine the equation of partition surface dependent on particle size and particle density describing researched material. The obtained surface proves that it is possible to evaluate material separation which occurs during mineral processing operations, such as jigging, by means of more than one feature of researched material. Furthermore, its quality confirms that it is justified to apply non-parametric statistical methods instead of commonly used classical ones.